Universidade Federal do Espírito Santo

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Física

Av. Fernando Ferrari, 514, 29075-910. Vitória, ES - Brasil.
E-mail: ppgfis.ufes@gmail.com. Telefone: +55-27-4009-2833

Exame de ingresso 2019/1

INSTRUÇÕES

- **i. Código da prova.** Imediatamente antes da prova começar, deve-se sortear um número para cada candidato. Em uma folha contendo todos os números sorteados, cada candidato deve escrever seu nome e assinar ao lado do seu número correspondente.
- **ii. Identificação.** Ao receber a prova, **todas** as folhas da prova devem ser identificadas com o código da prova. O nome do candidato ou qualquer outra identificação não pode ser escrita na prova, sob pena de anulação da mesma.
- **iii. Folhas de questões.** Cada questão deve ser respondida na folha correspondente (o verso pode ser usado também).
- **iv. Folhas extras.** Essas folhas não contém um número de questão impresso, pois essa informação precisa ser completada pelo candidato, em acordo com a questão que se pretende responder. Não é aceito o uso de uma mesma folha para responder a mais de uma questão. Uma folha extra sem número de questão, ou com mais de um número de questão, pode ser considerada como rascunho do candidato, sem valor para pontuação.
- **v. Consultas.** Não é permitido nenhum tipo de consulta durante a prova.
- **vi. Aparelhos eletrônicos.** O uso de equipamentos eletrônicos como computadores, celulares e calculadoras não é permitido.
- **vii. Duração da prova.** A prova tem duração de quatro horas.
- **viii. Entrega da prova.** Ao terminar a prova, o aluno deve entregar todas as folhas que recebeu no início da prova, mesmo que não tenha escrito nada além do código da prova.
- **ix. Respostas.** As respostas podem ser escritas em espanhol, inglês ou português.

Programa de Pós-Graduação em Física

Código da prova: ________

Questão 1 (2,5 pontos)

Uma esfera condutora de raio a e carga total Q é imersa em um campo elétrico inicialmente uniforme $\vec{E}_0$. Encontre o potencial em todos os pontos externos a essa esfera.

Algumas definições e identidades úteis

$$\vec{\nabla} = \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}F_\phi + \frac{\partial}{\partial z}F_z$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial\phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\rho}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\phi) - \frac{\partial F_\rho}{\partial\phi}\right]\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2F_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta F_\phi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_\phi)\right]\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\hat{\phi}$$

$$\int_V \vec{\nabla}\vec{F}dv = \oint_A \vec{F}\cdot\hat{n}da$$

$$\int_V \vec{\nabla}\times\vec{F}dv = \oint_A \hat{n}\times\vec{F}da$$

$$\int_V \vec{\nabla}\phi dv = \oint_A \phi\hat{n}da$$

Polinômios de Legendre

$$P_0(\cos\theta) = 1$$
$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$
$$P_2(\cos\theta) = \left(3\cos^2\theta - 1\right)/2$$

Código da prova: ________

Questão 2 (2,5 pontos)

Duas cascas cilíndricas de raios r_a e r_b tem seus eixos de simetrias coincidentes e estão carregadas de modo a possuírem os potenciais ϕ_a e ϕ_b respectivamente. Calcule o potencial na região entre as cascas cilíndricas.

Código da prova: ________

Questão 3 (2,5 pontos)

Faça uma descrição, o mais completa possível, da Representação de Heisenberg da mecânica quântica, fornecendo equações e diagramas. Fale como é feita abordagem, abordando dentre outros aspectos, a equação de Heisenberg, os estados quânticos do sistema, base, autovalores, observáveis correspondentes às grandezas físicas, etc. Didaticamente, caso ache oportuno, poderá comentar como a Representação de Heisenberg difere da Representação de Schrödinger.

Programa de Pós-Graduação em Física

Código da prova: __________

Questão 4 (2,5 pontos)

Na representação de Heisenberg, os operadores evoluem ao longo do tempo e os estados são estáticos. Nesta representação da mecância quântica, o operador hermitiano Hamiltoniano que descreve um oscilador harmônico simples unidimensional de frequência ω é dado por

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) + \frac{1}{2}\right), \quad [\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)] = 1.$$

O espectro de energia é $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, e seus respectivos autoestados de energia (normalizados) são dados por $|n\rangle$. No instante $t = 0$ os operadores $\hat{a}(t)$ e $\hat{a}^\dagger(t)$ atuam da seguinte forma: $\hat{a}(0)\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ e $\hat{a}^\dagger(0)\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$. Suponha que o sistema seja descrito pelo famoso estado coerente $|\lambda\rangle$, caracterizado pela equação

$$\hat{a}(0)\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle\,, \quad \langle\lambda|\lambda\rangle = 1, \quad \lambda = |\lambda|e^{-i\theta} \in \mathbb{C}.$$

(a) Determine o operador $\hat{a}(t)$ para todo $t \geq 0$ em termos da condição inicial $\hat{a}(0)$. Também calcule o valor médio da energia do sistema no estado coerente.

(b) Determine os valores médios da posição $x(t)$ e do momento $p(t)$ para $t \geq 0$ no caso do estado coerente, onde $\hat{x}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}^\dagger(t) + \hat{a}(t)\right)$ e $\hat{p}(t) = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\hat{a}^\dagger(t) - \hat{a}(t)\right)$. Compare o resultado com a evolução de um oscilador clássico.

(c) Demonstre que para o oscilador harmônico o valor médio da posição evolui, independente do estado, exatamente como a coordenada $x(t)$ do oscilador harmônico clássico para alguma condição inicial. Quais são as condições iniciais associadas a um autoestado de energia $|n\rangle$ e ao estado coerente $|\lambda\rangle$?

Dica: A evolução temporal de um operador $\hat{O}$, sem dependência explícita no tempo, é dada pela equação de Heinsenberg

$$\frac{d\hat{O}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{O}].$$

Código da prova: ________

Folha extra 1

Questão ___

Programa de Pós-Graduação em Física

Código da prova: ________

Folha extra 2

Questão ____

Programa de Pós-Graduação em Física

Código da prova: ________

Folha extra 3

Questão ___

Programa de Pós-Graduação em Física

Código da prova: __________

Folha extra 4

Questão ____

Programa de Pós-Graduação em Física

Código da prova: __________

Folha extra 5

Questão ____