Programa de Pós-Graduação em Física

GABARITO

Questão 1 (2,5 pontos)

a) (1,7 pontos) Seja $|\psi(t)\rangle$ um estado que é solução da equação de Schroedinger. Em um dado instante t_0 encontra-se que

$$\langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle = \int |\psi(\vec{x}, t_0)|^2 \, d^3x = C_0,$$

em que C_0 é certa constante. O que pode ser afirmado sobre $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle$ em um instante t qualquer? Use a equação de Schroedinger para demonstrar, em detalhes, sua resposta.

b) (0,8 ponto) Qual a relevância física da resposta apresentada no item anterior? Em particular, considere as consequências da reposta anterior sobre a probabilidade de encontrar uma partícula em certa região do espaço.

RESPOSTA:
Há mais de uma forma de fazer corretamente este problema. Segue um exemplo, que não é o mais rápido:

a) Segundo a equação de Schroedinger,

$$i\hbar\, \partial_t\psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\psi(\vec{x}, t) + V(\vec{x}, t)\psi(\vec{x}, t).$$

Consequentemente,

$$-i\hbar\, \partial_t\psi^*(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\psi^*(\vec{x}, t) + V(\vec{x}, t)\psi^*(\vec{x}, t).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\partial_t\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle &= \int(\partial_t\psi\psi^* + \psi\partial_t\psi^*)d^3x \\
&= \frac{1}{i\hbar}\int\left[-\frac{\hbar}{2m}\psi^*\nabla^2\psi + \psi^* V\psi + \frac{\hbar}{2m}\psi\nabla^2\psi^* - \psi V\psi^*\right] d^3x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Deste resultado conclui-se que $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = C_0$ para qualquer instante t.

b) Foi obtido que a normalização da função de onda é preservada no tempo. Segundo os postulados da mecânica quântica, $\psi\psi^*$ é uma densidade de probabilidade. Assim foi obtida a conservação de probabilidade (num sentido global). Em particular, se a probabilidade de encontrar certa partícula em algum lugar do espaço for 1 num dado instante, então essa probabilidade é 1 em qualquer instante (conservação do número de partículas).

Gabarito 2016/2

Questão 2 TE

Problema 2.31, pg 93
Griffiths, D. J.
Introduction to Eletrodynamics

a) $$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{i=1\\ j=4}}^{3}\frac{q_i}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\frac{q}{a}+\frac{q}{a\sqrt{2}}-\frac{q}{a}\right\}$$

20% 20%

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-2\right)$$ Potencial da Configuração. 10%

Como $W_4 = q\cdot\varphi$, teremos

$$W_4 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-2\right)$$

$\boxed{50\% \equiv 1{,}3 \text{ pontos}}$

b) $W_1 = 0$ (10%) ; $W_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{q^2}{a}\right)$ (10%) ; $W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{\sqrt{2}a}-\frac{q^2}{a}\right)$ (10%)

$$W_{Tot} = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

$$W_{tot} = \sum_{i=1}^{4} W_i$$ 10%

$$W_{Tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}\left\{-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-1-2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$W_{Tot} = \frac{1}{\cancel{4}_{2}\pi\varepsilon_0}\frac{\cancel{2}q^2}{a}\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}-2\right)$$ 10%

$$W_{tot} = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-2\right)$$

$\boxed{48\% \equiv 1{,}2 \text{ pontos}}$

Programa de pós-graduação em Física - UFES
Processo Seletivo 2016/02 - Gabarito

Questão 3

a) $$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r},t) + V(\vec{r},t)\,\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t)}$$

b) Para $V(\vec{r},t) = V(\vec{r})$ podemos usar o método de separação de variáveis:

Fazendo:
$$\Psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r})\,\varphi(t)$$
obtemos:
$$i\hbar\,\psi(\vec{r})\frac{d}{dt}\varphi(t) = \varphi(t)\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r}) + V(\vec{r})\psi(\vec{r})\right]$$
$$\Rightarrow \frac{i\hbar}{\varphi(t)}\frac{d\varphi(t)}{dt} = \left[\frac{1}{\psi(\vec{r})}\hat{H}\psi(\vec{r}) = E\right]$$
logo:
$$\int\frac{d\varphi(t)}{\varphi(t)} = -\int\frac{iE\,dt}{\hbar}$$
$$\varphi(t) = C\,e^{\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)}$$, deixando a constante para a parte espacial (normalização) temos:
$$\boxed{\varphi(t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}}$$

c) Supondo poço unidimensional com
$$V(x) = \begin{cases}\infty, & x<0\\ 0, & 0\le x\le a\\ \infty, & x>a\end{cases}$$
Para $E \geq 0$ temos:

$\psi(x)$ fora da região $0\le x\le a$ se anula (partícula completamente confinada)

Para $0\le x\le a$ temos:
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x)$$
Escrevendo na forma:
$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + K^2\psi(x) = 0$$ com $K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ temos as soluções:

$$\psi(x) = A' e^{ikx} + B' e^{-ikx} \Rightarrow \psi(x) = A \operatorname{sen}(kx) + B \cos(kx)$$

Condições de contorno:

$$\psi(0) = \psi(a) = 0$$

Com $\psi(0) = 0$, obtemos $\boxed{\psi(x) = A \operatorname{sen}(kx)}$ $[B = 0]$

com $\psi(a) = A \operatorname{sen}(ka) = 0$, obtemos: $\boxed{K_n a = n\pi \quad , n = 1, 2, 3, \ldots}$

Essa condição determina a energia:

$$\boxed{E_n =} \frac{\hbar^2}{2m} K_n^2 = \boxed{\frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2 m a^2} \quad , n = 1, 2, 3, \ldots}$$

Substituindo em $\psi(x)$ fica:

$$\psi(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Realizando a normalização temos:

$$\int_0^a |\psi_n(x)|^2 dx = 1$$

$$= |A|^2 \int_0^a \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = 1$$

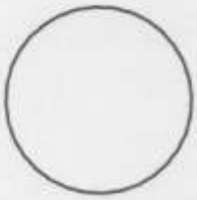
$|A|^2 = \frac{2}{a}$ onde escolhemos $\boxed{A = \sqrt{\frac{2}{a}}}$

logo:

$$\boxed{\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad n = 1, 2, \ldots}$$

QUESTÃO 4

Uma carga q é colocada a uma distância d do centro de uma esfera de raio a condutora e aterrada. Mostre que o potencial em todos os pontos fora da esfera pode ser obtido, substituindo a esfera por uma carga em algum ponto da linha entre o centro da esfera e a carga q, mantendo as condições de contorno iniciais.



Uma carga q' substitui a esfera condutora, colocada em um ponto $d'<a$, sobre a linha que une o centro da esfera à carga q. Então o potencial numa posição $r > a$ é dada por

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{\left(r^2+d^2-2rd\cos\theta\right)^{1/2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q'}{\left(r^2+d'^2-2rd'\cos\theta\right)^{1/2}}$$

$$\phi(\vec{a}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{q}{\left(a^2+d^2-2ad\cos\theta\right)^{1/2}} + \frac{q'}{\left(a^2+d'^2-2ad'\cos\theta\right)^{1/2}}\right) = 0$$

Para que os denominadores fiquem proporcionais, faremos $d' = \dfrac{a^2}{d}$. Teremos então

$$\phi(\vec{a}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{q}{\left(a^2+d^2-2ad\cos\theta\right)^{1/2}} + \frac{{}^{q'd}\!/_{a}}{\left(a^2+d^2-2ad\cos\theta\right)^{1/2}}\right] = 0$$

Para que $\phi(a)$ se anule, $q' = -q\dfrac{a}{d}$.

Temos portanto, a posição da carga imagem

$$d' = \frac{a^2}{d}$$

e a carga imagem

$$q' = -q\frac{a}{d}.$$