

EXPERIMENTO B4 – DISPERSÃO DA LUZ EM PRISMAS

B4.1 EQUIPAMENTO

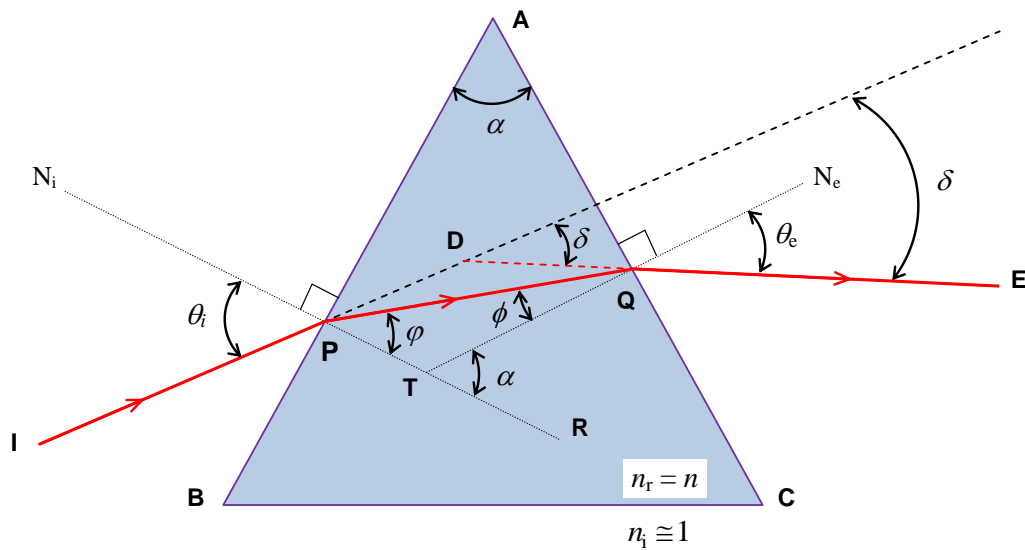
Fonte de luz de referência (Hg); elemento refrativo (prisma) de vidro; espectrômetro Zeiss.

B4.2 OBJETIVOS

- Verificar como um prisma separa a luz branca de suas componentes coloridas;
- Determinar o índice de refração do prisma em função do comprimento de onda $n(\lambda) \times \lambda$;
- Verificar aplicabilidade da lei de Cauchy ou da lei de Sellmeier para a dispersão.

B4.3 TEORIA

Medidas de índice de refração em função do comprimento de onda, $n = n(\lambda)$, são extremamente relevantes para caracterizar materiais e suas aplicações, tais como no desenvolvimento de lentes para instrumentação óptica, de fibras ópticas para transmissão de dados, etc. As fibras ópticas, p. ex., são constituídas de vidro e envolvidas em um plástico com índice de refração menor que o vidro. Com a escolha adequada do ângulo de incidência, ocorrerá reflexão total na interface de separação vidro-plástico e então a informação contida no feixe de luz ficará confinada no interior da fibra, sem perdas, podendo-se transportar as informações desejadas por distâncias consideráveis.



O prisma é um dispositivo óptico muito útil para a obtenção de índice de refração do material que o constitui. Quando sobre ele incide luz branca (composta de uma gama de cores), na direção de incidência IP (ângulo θ_i), cada uma de suas componentes coloridas será refratada em uma direção PQ (ângulo $\theta_r = \phi$) diferente para a mesma direção de incidência. Após sofrer uma segunda refração na saída do prisma (com ângulo de entrada $\theta'_i = \phi$), o raio emergente QE emergirá do prisma com ângulo $\theta'_r = \theta_e$, também diferente para cada λ . A direção do raio emergente QE forma um ângulo em relação à direção do raio incidente IP , conhecido como “desvio” δ do prisma.

Obviamente, δ é uma função do ângulo de incidência θ_i e o caso de interesse ocorre na situação de simetria em que o raio emergente forma o mesmo ângulo que o raio incidente com as respectivas normais ao prisma, ou seja, quando $\theta_i = \theta_e$, e aí o raio PQ no interior do prisma fica paralelo à sua base BC . Nessa situação, é possível provar que o desvio atinge o seu valor mínimo $\delta = \delta_0$.

As equações básicas necessárias para provar isso são:

$$\begin{aligned} \hat{QTR} = \alpha & & (\hat{BAC} = \alpha ; \mathbf{N}_i\mathbf{R} \perp \mathbf{AB} \text{ e } \mathbf{N}_e\mathbf{T} \perp \mathbf{AC}); \\ \text{sen } \theta_i = n \text{ sen } \varphi & & (\text{Snell em } \mathbf{P}); \\ \text{sen } \theta_e = n \text{ sen } \phi & & (\text{Snell em } \mathbf{Q}); \\ \alpha = \varphi + \phi & & (\alpha \text{ é ângulo externo no } \Delta \mathbf{PQT}); \\ \delta = (\theta_i - \varphi) + (\theta_e - \phi) = \theta_i + \theta_e - \alpha & & (\delta \text{ é ângulo externo no } \Delta \mathbf{PQD}). \end{aligned}$$

Partindo da condição de mínimo $(d\delta/d\theta_i)_{\theta_0} = 0$, mostre que $(d\theta_e/d\theta_i)_{\theta_0} = -1$, e por derivadas das equações vindas da Lei de Snell em relação a θ_i , é possível mostrar que na situação de mínimo tem-se $\theta_i = \theta_0 = \theta_e$. Das equações de Snell, imediatamente segue que $\varphi = \varphi_0 = \phi$ e então $\alpha = \varphi_0 + \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \alpha/2$. Também segue que $\delta_0 = \theta_0 + \theta_0 - \alpha \Rightarrow \theta_0 = (\delta_0 + \alpha)/2$. Qualquer das equações de Snell, na condição de mínimo, se escreve como $\text{sen } \theta_0 = n \text{ sen } \varphi_0$ e portanto

$$n(\lambda) = \frac{\text{sen}\{[\delta_0(\lambda) + \alpha]/2\}}{\text{sen}(\alpha/2)}.$$

Experimentalmente, essa relação acima vale apenas quando o raio luminoso passa simetricamente pelo prisma. Pelas simples medidas do ângulo α de abertura do prisma e do ângulo $\delta_0(\lambda)$ de desvio mínimo de um dado feixe luminoso de comprimento de onda λ , pode-se obter o correspondente índice de refração $n(\lambda)$ do material do prisma.

A equação de Cauchy é uma relação empírica entre n e λ , válida para materiais transparentes, e tem a forma geral

$$n(\lambda) = \sum_{k=0}^N \frac{B_k}{\lambda^{2k}} = B_0 + \frac{B_1}{\lambda^2} + \frac{B_2}{\lambda^4} + \dots.$$

O número de termos N é objeto de debate científico, mas em geral é suficiente manter-se até três termos, para a maioria dos materiais ópticos. Os coeficientes B_k podem ser interpretados fisicamente, mas isso não possui muita relevância em nossa discussão.

A equação foi desenvolvida em 1836 por Augustin Louis Cauchy, usando como base uma teoria de interação entre luz e matéria que se mostrou incorreta posteriormente. Mas a equação tem-se mostrado válida nas regiões de dispersão normal da luz no espectro visível. Na região de comprimentos de onda grandes, no infravermelho, a equação produz certa imprecisão, e é totalmente inadequada para regiões de dispersão anômala, p. ex., quando há picos ressonantes em $n(\lambda)$, para determinados valores de λ .

Na região de validade da equação, no visível, pode ser suficiente se usar apenas os dois primeiros termos:

$$n(\lambda) = B_0 + \frac{B_1}{\lambda^2}.$$

Na tabela ao lado, tem-se os coeficientes cotados para vidros comercialmente utiliza-

Material (Vidros)	A_0	A_1 (10^3 nm^2)
Sílica fundida	1,4580	3,54
Borossilicato BK7	1,5046	4,20
Crown duro K5	1,5220	4,59
Crown de bário BaK4	1,5690	5,31
Flint de bário BaF10	1,6700	7,43
Flint denso SF10	1,7280	13,42

dos. Nesta equação, λ é medido no vácuo, em nanômetros.

O pesquisador W. Sellmeier posteriormente desenvolveu em 1871 uma nova equação empírica, de melhor ajuste para modelagem de dispersão da luz, capaz de abranger regiões de dispersão anômala, constituindo um modelo mais preciso para a dependência do índice de refração com λ nas regiões do UV (“*ultraviolet*” – ultravioleta, com $\lambda < 350$ nm), do visível ($380 \text{ nm} < \lambda < 750$ nm) e do IR (“*infrared*” – infravermelho, com $\lambda > 800$ nm). A forma usual da equação de Sellmeier é:

$$n^2(\lambda) = B_0 + \sum_{k=1}^N \frac{B_k \lambda^2}{\lambda^2 - C_k} = B_0 + \frac{B_1 \lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2 \lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \dots$$

Nessa equação, λ é o comprimento de onda no vácuo, e não no material (onde $\lambda_n = \lambda/n(\lambda)$). Para vidros, $B_0 = 1$, e para outros tipos de materiais, como cristais p. ex., uma diferente forma é usada.

Normalmente é necessário apenas reter os três primeiros termos para obter bons resultados em vidros ópticos normais, podendo $n(\lambda)$ diferir do valor verdadeiro do índice de refração por menos que 0,00001 na faixa de 380 a 2.300 nm (do visível ao IR longínquo). Note que o fim da faixa é da ordem de rugosidade típica de uma amostra de vidro ($< 5 \mu\text{m}$). A referência usual na literatura a essas rugosidades é o uso da nomenclatura λ/N , e toma-se, por base, o comprimento de onda médio no visível, algo como 500 nm (verde) – 550 nm (amarelo); quanto maior N , mais próximo de um plano perfeito é a superfície. Assim, a rugosidade do vidro seria $\sim 5\lambda$ ($N \cong 0,2$). Os espelhos usados em interferômetros Michelson normalmente vão de $\lambda/10$ a $\lambda/50$. Já os utilizados em espectrômetros Fabry-Perot vão de $\lambda/100$ a $\lambda/200$ (imperfeições típicas de menos que 5 nm!).

Note, adicionalmente, que a equação de Sellmeier pode ser interpretada tal que cada coeficiente represente um termo de absorção ressonante de grandeza B_k para o comprimento de onda $\lambda_k = \sqrt{C_k}$. A equação, com correções apropriadas feitas por Helmholtz, consegue descrever bem o comportamento do índice de refração nas regiões de picos de absorção.

Por último, note que no limite de comprimentos de onda longos, distantes dos picos de absorção ressonantes ($\lambda \gg \lambda_k$), o índice de refração tende para

$$n(\lambda) \cong (1 + \sum_k B_k)^{1/2},$$

e, como da teoria eletromagnética sabemos que $n(\lambda) = \sqrt{\epsilon_r}$, tem-se que uma boa aproximação para a constante dielétrica relativa do meio vítreo será dada por

$$\epsilon_r \cong 1 + \sum_k B_k \cong 1 + B_1 + B_2 + B_3.$$

Abaixo, indicamos os valores dos coeficientes para alguns vidros típicos:

Material (vidros)	B_1	C_1 (nm ²)	B_2	C_2 (nm ²)	B_3	C_3 (nm ²)
Sílica fundida	0,69616630	4.679,14826	0,40794260	13.512,0631	0,89747940	979.340,025
Borossilicato BK7	1,03961212	6.000,69867	0,23179234	20.017,9144	1,01046945	1.035.606,530

No laboratório utilizaremos uma fonte padrão de mercúrio atômico (Hg) e já fornecemos uma tabela (ver item A5.5 do Experimento A5 - Grade de Difração), com indicação das principais raias espectrais no espectro visível da emissão do Hg e sua intensidade relativa, para facilitar suas identificações durante o experimento. Recorra a essa tabela, quando necessário.

B4.4 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

LEIA CUIDADOSAMENTE O TUTORIAL DE OPERAÇÃO DO ESPECTRÔMETRO ZEISS, ANTES DE PROSSEGUIR.

I. OBTENÇÃO DO ÂNGULO DE ABERTURA DO PRISMA

Posicione o prisma de vidro sobre a plataforma giratória, conforme figura. Faça o vértice **A** ficar voltado em direção ao feixe de luz “branca”, vindo da fonte de luz através do telescópio fixo e não se preocupe em alinhar o prisma simetricamente em relação à direção de incidência. Tenha atenção em usar o mesmo vértice nas etapas seguintes do experimento (marque-o como lápis, para tanto!).

Fixe a plataforma giratória, ou evite esbarrar nela durante o experimento, e localize os raios refletidos, começando pelo lado esquerdo e medindo o ângulo α_E e depois no lado direito

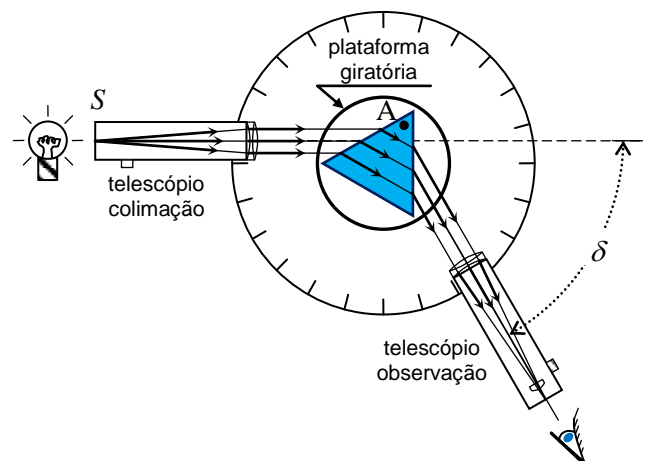
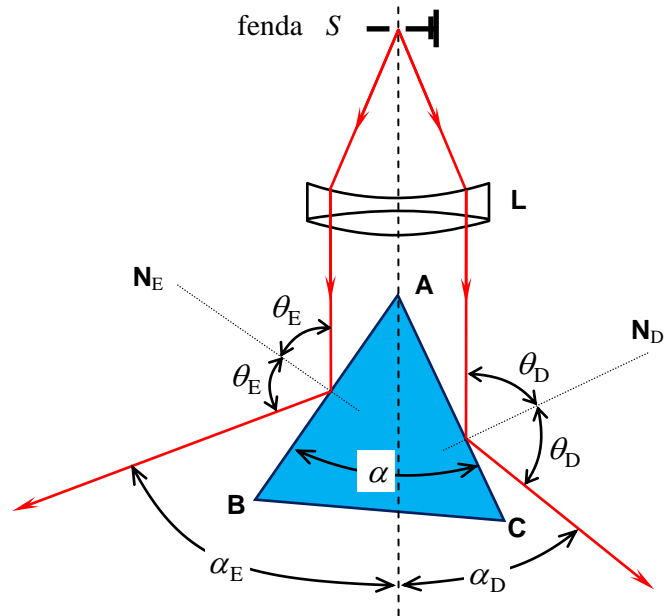
e medindo α_D . O ângulo de abertura do prisma será obtido de $2\alpha = \alpha_E + \alpha_D$.

Gire levemente a plataforma, mudando um pouco a posição do prisma e repita as medidas acima. Faça isso mais uma vez, usando em cada vez um aluno diferente para a leitura dos ângulos. Isso produzirá uma estimativa da incerteza no valor de α associada ao método de medida, certamente maior que a precisão da leitura oferecida pelo espectrômetro Zeiss.

II. MEDIDAS DOS ÂNGULOS DE DESVIO MÍNIMO

Posicione o prisma sobre a plataforma de modo que seja possível observar os raios refratados, em relação a seu vértice **A**, no setor esquerdo do espectrômetro. Gire o telescópio móvel (o de observação) e localize as raiais coloridas típicas do espectro óptico do Hg. Ajuste o foco para observação nítida das raiais. Gire a plataforma de modo que o ângulo de incidência θ_i varie e fique observando o efeito sobre a posição angular da raia violeta.

Note que, em dado sentido de giro, a raia se desloca para a direita, atinge um ponto de retorno e passa a se mover no sentido oposto, ou seja, voltando para a esquerda e correspondendo a valores maiores do ângulo de emergência θ_e . A situação de desvio mínimo ocorre no exato ponto de retorno da raia. Posicione a plataforma giratória nessa situação, fixe o braço móvel do espectrômetro e utilize o ajuste fino de rotação do braço móvel para por a raia exatamente no centro do retículo de referência. Meça o ângulo de desvio mínimo $\delta_0(\lambda)$. Repita o processo acima para cada uma das demais raiais do espectro visível do mercúrio. Repita todo o conjunto de medidas mais duas vezes, com alunos diferentes nas medidas dos ângulos.



B4.5 ANÁLISES E CONCLUSÕES

- A. Demonstre, contemplando todas as passagens matemáticas, que na condição de desvio mínimo o ângulo de emergência do feixe é igual ao de incidência.
- B. Determine das cores vistas qual é refratada no maior ângulo e qual é no menor ângulo. Segundo a lei de Snell, e com a relação de dependência do índice de refração do prisma com o comprimento de onda, comente sobre se o resultado está de acordo com a previsão teórica.
- C. Deduza a afirmação de que o ângulo de abertura é a metade do ângulo total entre os feixes de luz branca refletidos nas faces laterais do prisma, cuja interseção define seu ângulo de abertura.
- D. Calcule o valor médio do ângulo de abertura do prisma, acompanhado de incerteza. Apresente os resultados na forma tabular.
- E. Usando os dados experimentais dos ângulos de desvio mínimo apresente uma tabela contendo as medidas de λ , os valores medidos $\delta_0^{(j)}(\lambda)$, $j = 1, 2, 3$, seus respectivos valores médios acompanhados de incertezas, e os valores médios calculados de $n(\lambda)$ e suas respectivas incertezas. Faça isso para todas as raias espectrais que você acha que são emissões do Hg.
- F. Faça um gráfico de $n(\lambda) \times \lambda^{-2}$, e faça um ajuste de regressão linear (método dos mínimos quadrados ou outro que achar conveniente) para obter as constantes B_0 e B_1 da equação devida a Cauchy, acompanhadas de incertezas. Tome cuidado aqui, pois provavelmente você deverá excluir um ou outro ponto experimental que estiver muito fora da linha reta média. Isso ocorre devido a emissões provenientes de impurezas ou de metais presentes no anodo da lâmpada, que são excitados simultaneamente com os átomos de Hg.
- G. Por comparação com a tabela de materiais apresentada, determine o tipo de vidro de que é composto o prisma. Faça uma análise baseada em diferenças percentuais nos valores dos coeficientes de Cauchy medidos e seus respectivos valores encontrados na tabela apresentada.
- H. Como alternativa, você pode tentar fazer um ajuste à equação de Cauchy até o coeficiente proporcional a λ^{-4} (B_2). Isso melhoraria os valores de B_0 e de B_1 para comparação com a tabela apresentada para os vidros tipicamente utilizados na confecção de instrumentos óticos. Você sabe explicar porque?
- I. Trabalho bônus: Tente fazer o ajuste dos dados experimentais à equação de Sellmeier, obtendo os coeficientes $B_1 \cdots C_3$. Caso consiga, o grupo ganhará crédito extra na disciplina, a ser acrescentado à média nas provas. Caso não, o resultado será inofensivo.

Redação: Prof. Rogério N. Suave.

B4.6 FOLHA DE DADOS

MEDIDA DO ÂNGULO DE ABERTURA DO PRISMA

Medida	Reflexão à esquerda	Reflexão à direita	
	α_E	α'_D	$\alpha_D = 359^\circ 59' 60'' - \alpha'_D$
1	° ' "	° ' "	° ' "
2	° ' "	° ' "	° ' "
3	° ' "	° ' "	° ' "

MEDIDAS DOS ÂNGULOS DE DESVIO MÍNIMO

Raia do Hg	Medida #1	Medida #2	Medida #3
1.	° ' "	° ' "	° ' "
2.	° ' "	° ' "	° ' "
3.	° ' "	° ' "	° ' "
4.	° ' "	° ' "	° ' "
5.	° ' "	° ' "	° ' "
6.	° ' "	° ' "	° ' "
7.	° ' "	° ' "	° ' "
8.	° ' "	° ' "	° ' "
9.	° ' "	° ' "	° ' "
10.	° ' "	° ' "	° ' "