UNIVERSIDADE FEDERAL
DO ESPÍRITO SANTO

FÍSICA EXPERIMENTAL

Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Exatas - CCE
Departamento de Física - DFIS

Revisão Propagação de Incerteza

Densidade de uma esfera metálica de aço. As doze medidas da grandeza diâmetro $D(d)$, com micrômetro *Starret* $(precisão \pm 0{,}01\, mm)$, estão apresentadas na Tabela 1. A grandeza massa (M) da esfera, medida em uma balança digital, é $M = (15{,}2 \pm 0{,}1)\, g$

Tabela 1- Dados das medidas do diâmetro "*d*" da esfera em 12 diferentes posições.

medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$d\ (mm)$	15,54	15,52	15,55	15,54	15,57	15,51	15,56	15,51	15,55	15,54	15,53	15,53

Diâmetro médio → $\bar{d} = 15{,}5375\, mm$

Incerteza absoluta→ $\Delta d = 0{,}01458333\, mm$

1- Pergunta: é uma grandeza direta? **R: Sim.**

Então, OBRIGATORIAMENTE se arredonda o valor considerando um 1 A.S. na incerteza. A resposta fica:

$$d = (15{,}54 \pm 0{,}01)\, mm$$

Revisão Propagação de Incerteza

Densidade de uma esfera metálica de aço. As doze medidas da grandeza diâmetro $D(d)$, com micrômetro *Starret* $(precisão \pm 0{,}01\, mm)$, estão apresentadas na Tabela 1. A grandeza massa (M) da esfera, media em uma balança digital, é $M = (15{,}2 \pm 0{,}1)\ g$

Tabela 1- Dados das medidas do diâmetro "*d*" da esfera em 12 diferentes posições.

medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$d\ (mm)$	15,54	15,52	15,55	15,54	15,57	15,51	15,56	15,51	15,55	15,54	15,53	15,53

$$d = (15{,}54 \pm 0{,}01)\ mm$$

Grandeza física indireta: Densidade (ρ)

$$\rho = \frac{m}{v} = \frac{6m}{\pi d^3} = 7{,}739287489\ \frac{g}{cm^3} \qquad \Rightarrow \Delta\rho = \rho\left(\left|\frac{\Delta m}{m}\right| + \left|3\frac{\Delta d}{d}\right|\right) = 0{,}065857\frac{g}{cm^3}$$

2 - Pergunta: é resposta final?

R: Se sim, aplique a regra acima**.** Caso contrário, trabalhe com 3 sigs. na incerteza. Aqui é considerado resposta final e, portanto, fica:

$$\rho = (7{,}74 \pm 0{,}07)\frac{g}{cm^3}$$

Gráficos

Gráficos

Gráficos são (i) formas simples de visualizar padrões nas medidas, (ii) mais econômica de apresentar grandes volumes de dados e (iii) mais claro para apresentar o ***modelo que ajusta*** *os dados experimentais.*

Tabela 2 – Dados da velocidade de um corpo em função do tempo.

Tempo (s)	Velocidade (cm/s)
5	0,6
12	1,1
16	1,9
19	3,0
22	3,9
24	4,5
28	4,6
30	4,0
32	3,2
34	2,3
38	1,2
44	0,5

Quais são os problemas do gráfico?

1- Nos. de significativos dos eixos correspondem aos das grandezas?

2- Marcações (traços) para fora do eixo. Devem ser para dentro.

3- O título do gráfico está presente? Onde deve ser colocado?

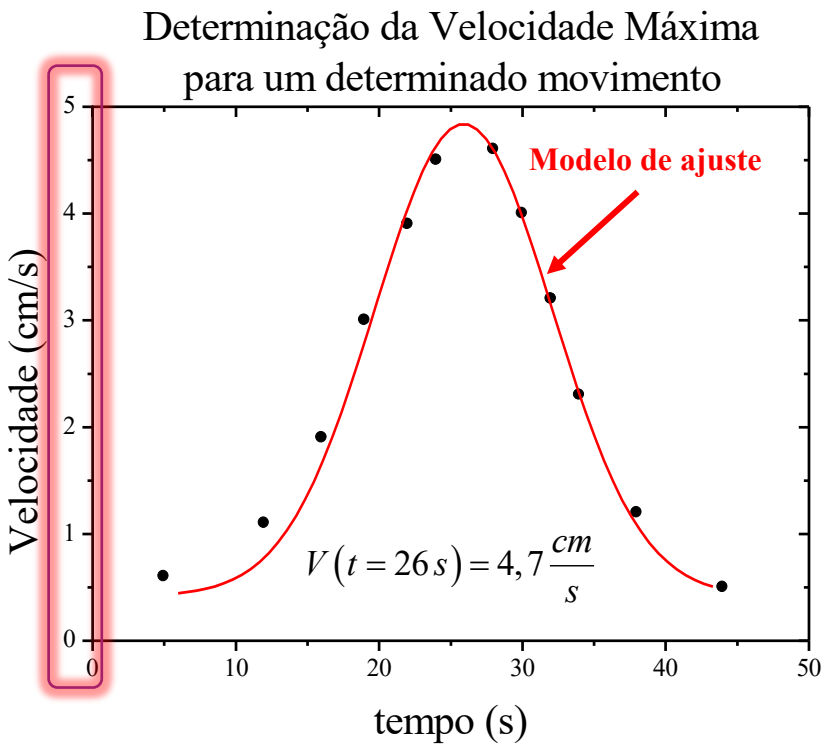


Figura 1 – Comportamento da velocidade em função do tempo de uma partículas acelerada.

Gráficos

Aspectos que devem ser observados na construção de gráficos

Há algumas regras básicas que devem ser seguidas na construção de gráficos:

- ✓ ***Título*** ➡ Deve aparecer na parte inferior e ser auto-explicativo
- ✓ ***Eixos*** ➡ **Norma Universal:**
  - ➢ ***Variável independente*** ➡ **Abscissas**
  - ➢ ***Variável dependente*** ➡ **Ordenadas**
  - ➢ ***Nome das grandezas*** ➡ O nome da grandeza ou deve ser escrita por extenso ou com sua variável. Os algarismos das medidas ou têm unidade definida (medidas feitas com equipamento calibrado) ou unidade arbitrária (u.a.) se não for calibrado. As unidades são separadas das grandezas física ou por vírgula ou mais comum entre ( ).
  - ➢ ***Escala***
    - ➡ Deve-se escolher escalas convenientes tais que facilitem tanto a construção quanto a leitura dos gráficos (maximizar o comprimento do eixo com dados).
    - ➡ Deve ter a informação do número de algarismos significativos das medidas.
    - ➡ Sugere-se adotar valores múltiplos ou submúltiplos de números inteiros.

      É importante mostrar o fator de conversão da escala
    - ➡ Nunca assinalar na escala as coordenadas dos dados experimentais.

Gráficos

Aspectos que devem ser observados na construção de gráficos

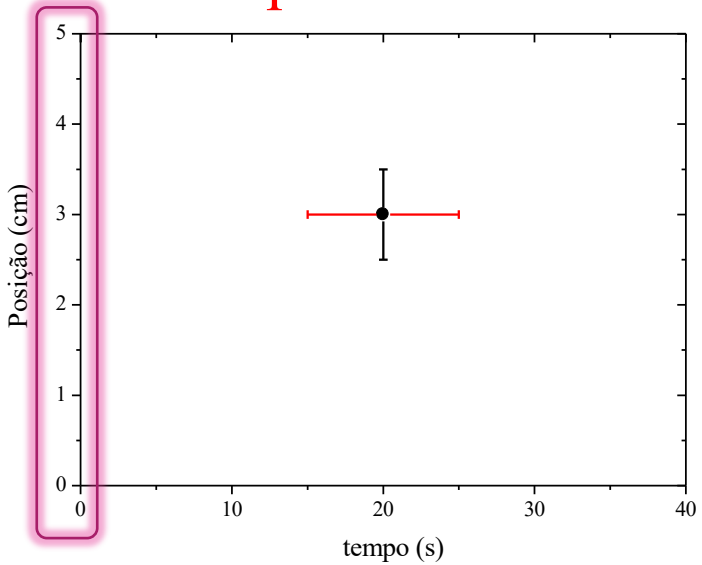
Vimos anteriormente que toda grandeza física experimentalmente medida estará afetada de uma incerteza devido ao processo de medida direta (avaliação) e indireta (propagação da incerteza)

✓ ***Barras de erros*** ➡ Os valores experimentais deverão ser representados com seus números de significativos e suas respectivas incertezas

$$t = (20 \pm 5)s$$

$$S = (3{,}0 \pm 0{,}5)cm$$

Quando não é possível desenhar as barras de incerteza, deve-se indicar no gráfico.



Qual(is) o(s) erro(s) existente(s) neste gráfico?

R: Número de significativos da grandeza posição e a maneira como a grandeza tempo foi escrita. Como a grandeza posição foi escrita com P, a grandeza tempo deveria ser escrita como Tempo. Falta do título. Traços para fora do eixo.

Gráficos

Definições e *Convenções*

Escala **-** É qualquer trecho de curva (em geral uma reta) marcada por traços, que estão em correspondência com valores e algarismos significativos de uma dada grandeza.

Passo **(**ΔL**)** **-** É a distância (em cm, mm, etc) entre dois traços numerados e consecutivos de uma escala.

Degrau **(**$\Delta f(x)$**)** **-** É a variação da grandeza em um passo.

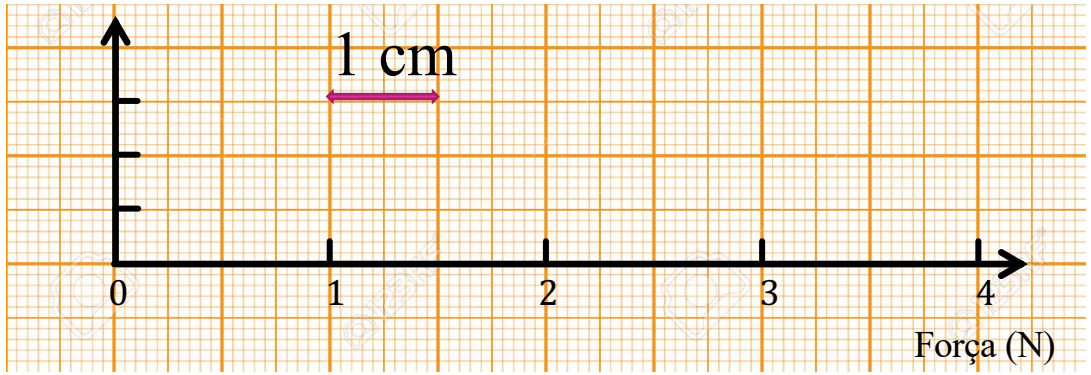
Módulo **(*M*)** **-** É a constante de proporcionalidade existente entre o passo ΔL e o degrau $\Delta f(x)$.

$$M_a = \frac{|\Delta L|}{|\Delta f(x)|}$$

Gráficos

Escala Linear

Vamos fazer a determinação de uma escala linear (papel milimetrado, 1 divisão = 1 mm).



Para a escala acima temos para o eixo das abscissas:

$$PASSO = constante = 2\ cm$$

$$DEGRAU = constante = 1\ N$$

$$MÓDULO = constante = M = 2\,\frac{cm}{N}$$

Gráficos

Escala Linear

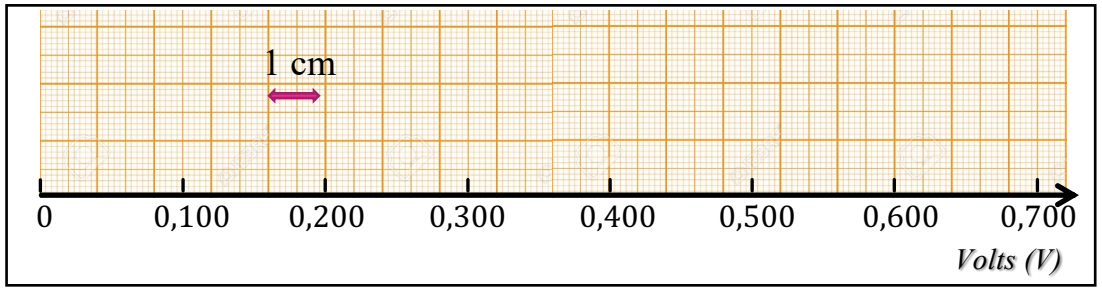
Deve-se levar em conta, na escolha do módulo M, o comprimento disponível para o eixo, a variação da grandeza a ser representada, o interesse ou não de fazer o zero da grandeza coincidir com a origem da escala e as limitações de ordem prática impostas na sua escolha.

Exemplo 1:

Construir uma escala linear para representar uma grandeza física definida como diferença de potencial que varia de 0,328 V até 0,700 V sendo de 18 cm o comprimento disponível para o eixo.

O que ocorre se a origem (zero) for incluído?

$$M = \frac{18\ cm}{0{,}700\ V} = 25{,}7\ \frac{cm}{V}$$



Isto leva em 2,5 cm para cada 0,1 V, com o uso de 17,5 cm do papel.

Gráficos

Escala Linear

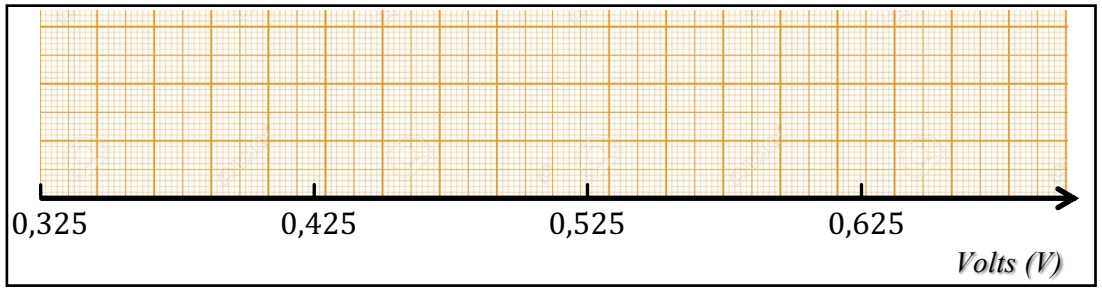
Exemplo:

Construir uma escala linear para representar uma diferença de potencial que varia de 0,328 V até 0,700 V sendo de 18 cm o comprimento disponível para o eixo.

Se a origem não for ponto de interesse:

$$M = \frac{18\ cm}{(0{,}700 - 0{,}328)\ V}$$

$$M = 48{,}39\,\frac{cm}{V}$$

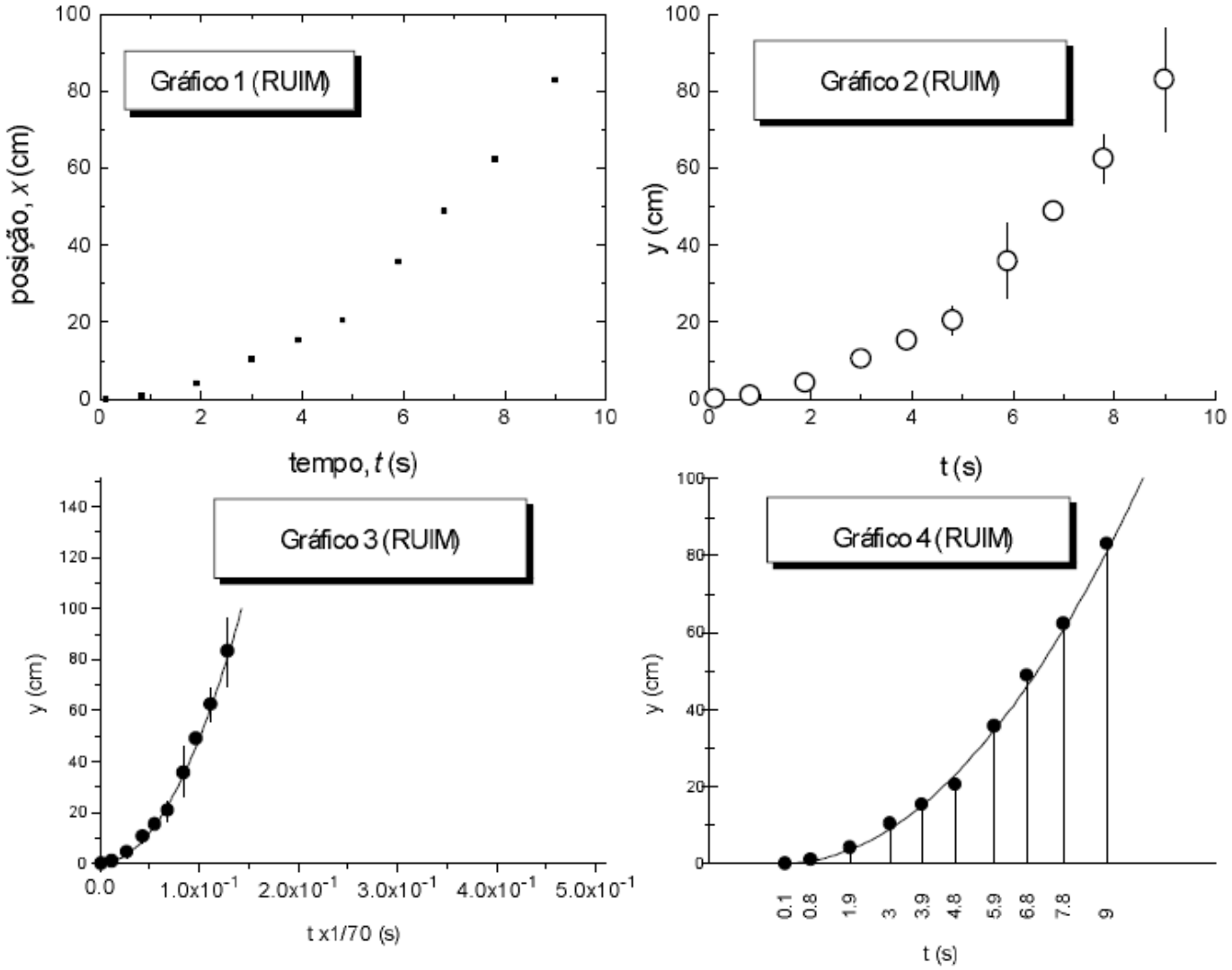


Isto leva em 4,8 cm para cada 0,1 V, com o uso de 18 cm do papel, começando em $0{,}325\ V$.

É necessário que os dados experimentais fiquem no interior do eixo.

Gráficos

Gráficos – Alguns erros?



Gráficos

Exemplos de erros ao se montar gráficos. Vamos encontrar quais?

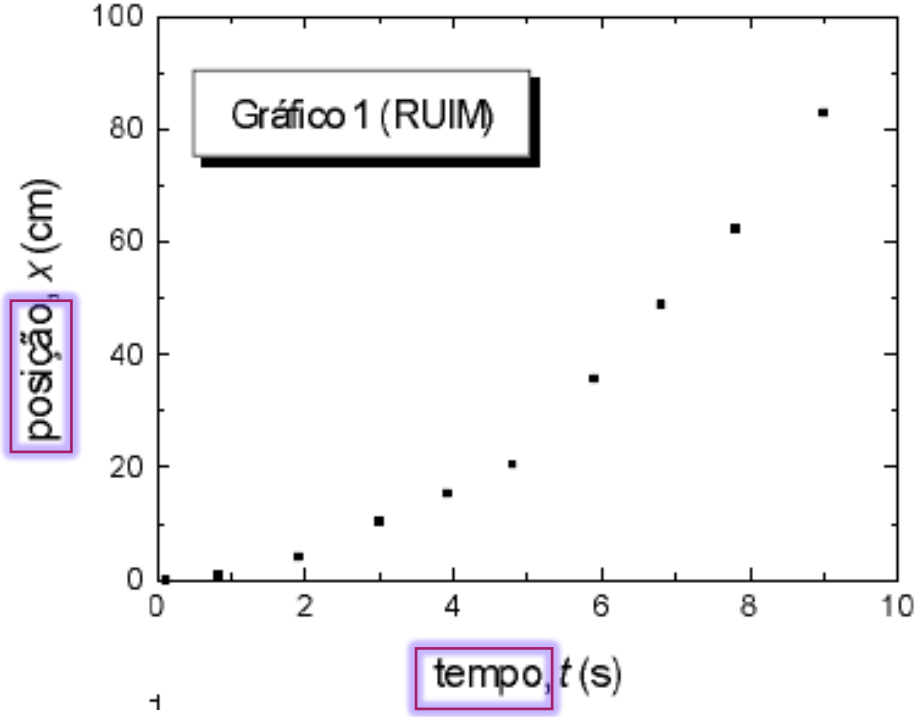


Figura A – Comportamento da posição em função do tempo de um corpo acelerado.

As grandezas físicas estão representadas com seus nomes por extenso e ao mesmo tempo com suas abreviaturas (só pode uma das maneiras - escolha do autor).

Está sendo usado a vírgula e o parênteses para a unidade (só pode uma). Faltam o título do gráfico e as incertezas dos pontos experimentais. **Vamos dar um nome para a Figura A?**

Gráficos

Exemplos de erros ao se montar gráficos. Vamos encontrar quais?

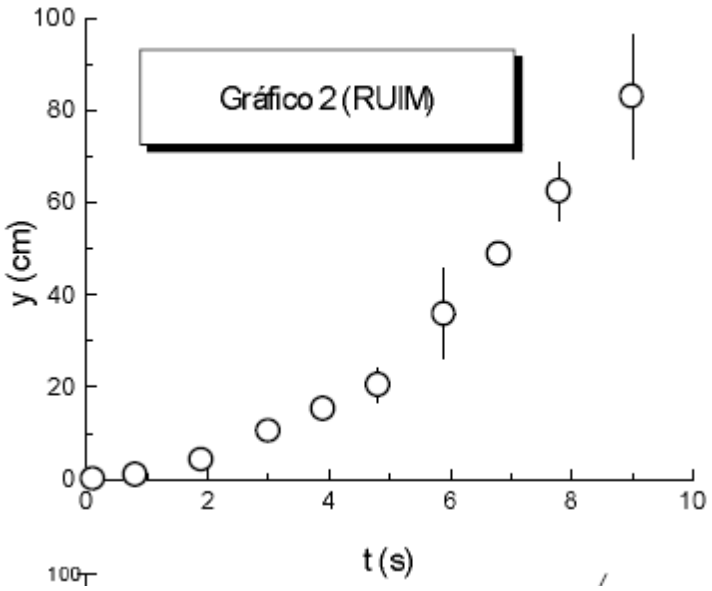


Figura B – Comportamento da posição em função do tempo de um corpo acelerado.

Tamanho dos pontos experimentais (veja que próximo a origem os pontos passam para fora do gráfico). Falta o título do gráfico. **Vamos dar um nome para a Figura B?**

Gráficos

Exemplos de erros ao se montar gráficos. Vamos encontrar quais?

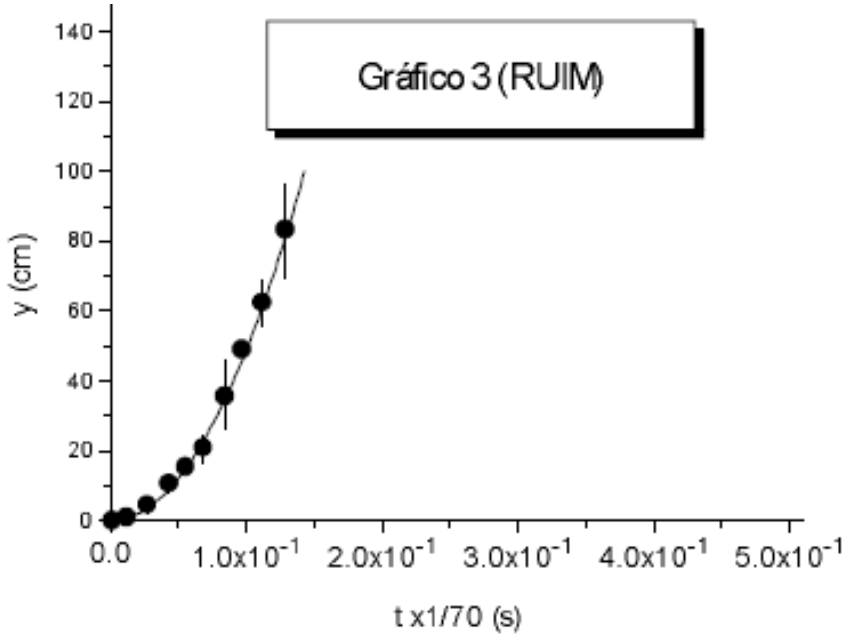


Figura C – Comportamento da posição em função do tempo de um corpo acelerado.(aqui deve aparecer a função que ajusta os pontos experimentais).

1- Grande parte da área do papel está perdida (não utilizada = escalas erradas).

2- Os pontos experimentais estão relativamente grandes, como no caso da Figura B.

3 - O eixo horizontal (tempo) tem um fator igual em todos eles e a grandeza também está erroneamente dividida por outro fator. O correto é fazer a divisão dos valores por 7 (escolha correta dos valores da escala). Depois, deve-se colocar o fator multiplicativo (10^{-2}) dentro da unidade, ou seja, (10^{-2} s).

4 – Os traços estão para fora do eixo ao invés de estarem para dentro.

5 – Falta, no título da figura, a função que ajusta os pontos experimentais.

Gráficos

Exemplos de erros ao se montar gráficos. Vamos encontrar quais?

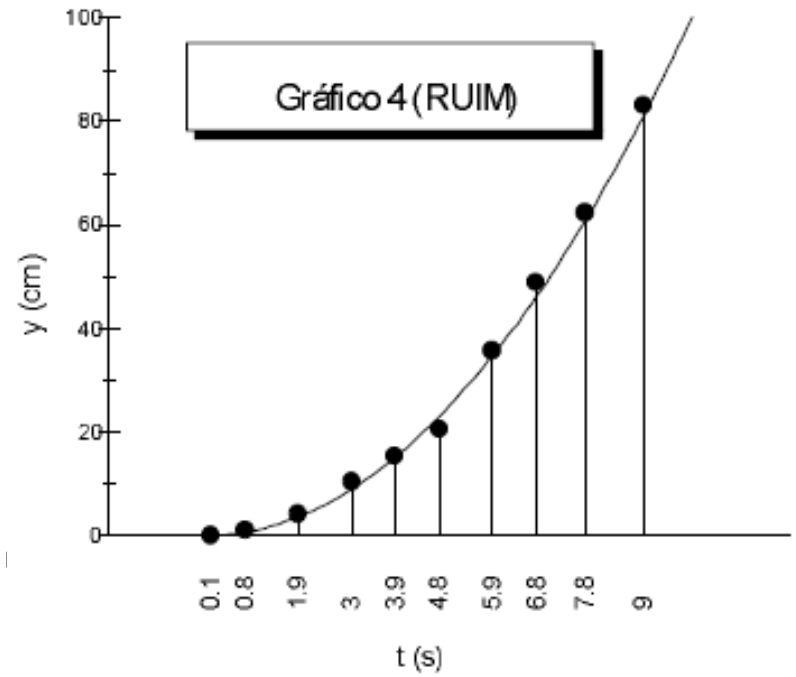


Figura D – Comportamento da posição em função do tempo de um corpo acelerado. (aqui deve aparecer a função que ajusta os pontos experimentais).

1- Os pontos experimentais estão relativamente grandes, como no caso da Figura B.

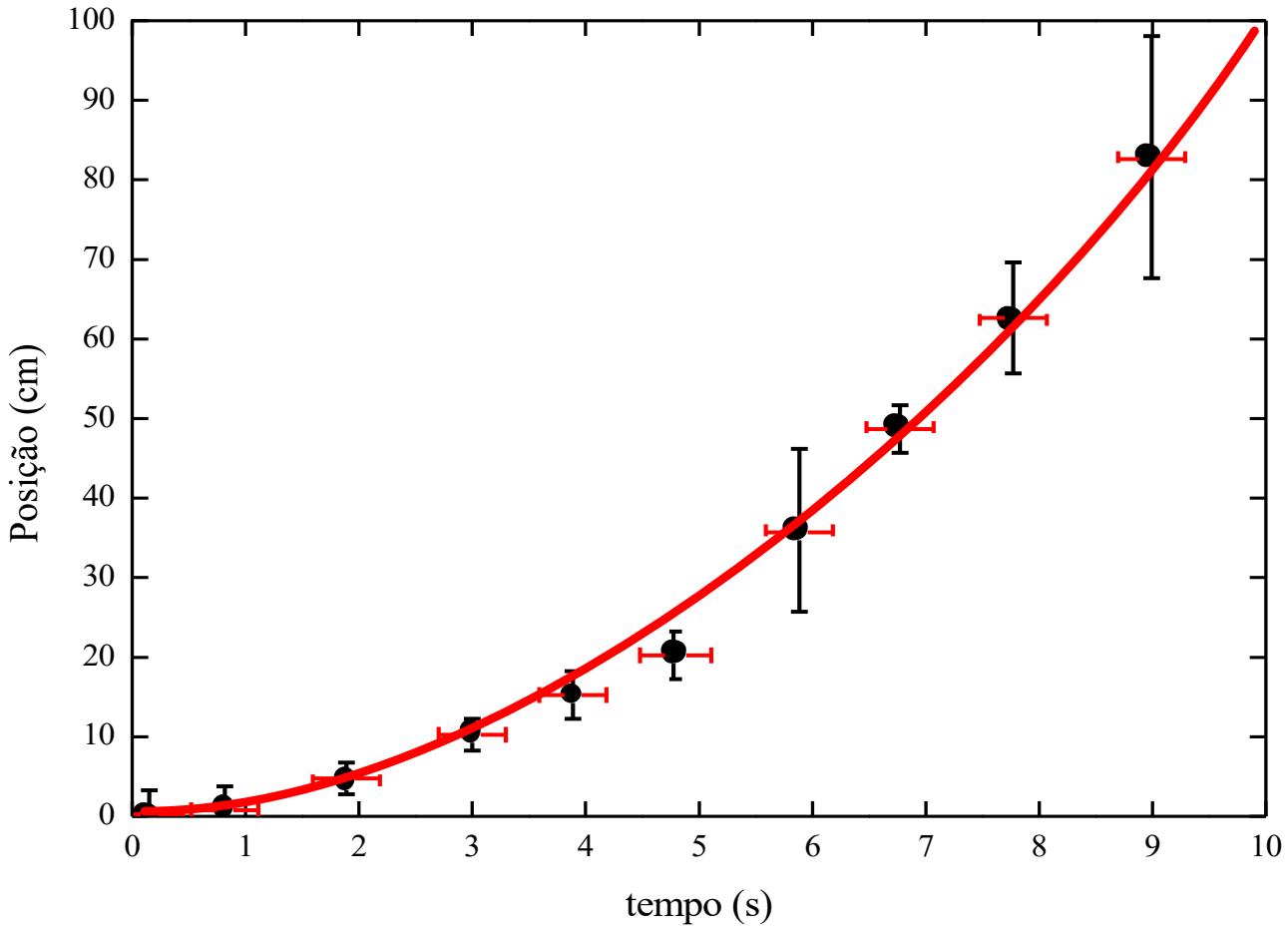
2 - O eixo horizontal (tempo) não tem um fator de escala linear. Os algarismos estão colocados perpendicular ao eixo e não paralelos.

3 - Os traços estão para fora do eixo (só devem aparecer para dentro).

4 – As barras verticais que são PROIBIDAS SEMPRE ligando o eixo aos pontos experimentais. Falta de incertezas.

5 – Falta, no título da figura, a função que ajusta os pontos experimentais.

Gráficos



Quais os principais erros deste gráfico?

Título, número de significativo da grandeza tempo (definido pelo incerteza). Falta a função que ajustou os dados

Avisos e comentários!

Quando todos os pontos experimentais já estiverem marcados com suas respectivas incertezas no gráfico, resta traçar a curva que melhor ajusta (menor desvio padrão) os pontos experimentais. Esta curva será o modelo físico que teremos em mãos para conhecermos o comportamento do sistema.

A função não precisa passar sobre todos os pontos. É possível que a curva não passe por nenhum ponto do gráfico, mas deve ser escolhida para dar o menor desvio padrão do comportamento dos dados.

Não é necessário que a curva tenha início no primeiro e termine no último ponto experimental.

Gráficos

Análise Gráfica

Permite, em muitos casos, determinar a lei (já existente ou a se determinar) que rege um fenômeno físico.

✓ ***Conhecer a lei*** ⟹ **Elaborar modelos físicos**

Como varia o comprimento de uma barra metálica em função da temperatura?

Sabemos da teoria que a dilatação térmica é regida pela equação:

$$L = L_0 + \alpha L_0 \Delta T$$

onde α é o coeficiente de dilatação linear do material da barra

Gráficos

Análise Gráfica

Em uma escala linear, uma reta sempre é descrita da seguinte forma:

$$y = mx + b$$

$$\Downarrow$$

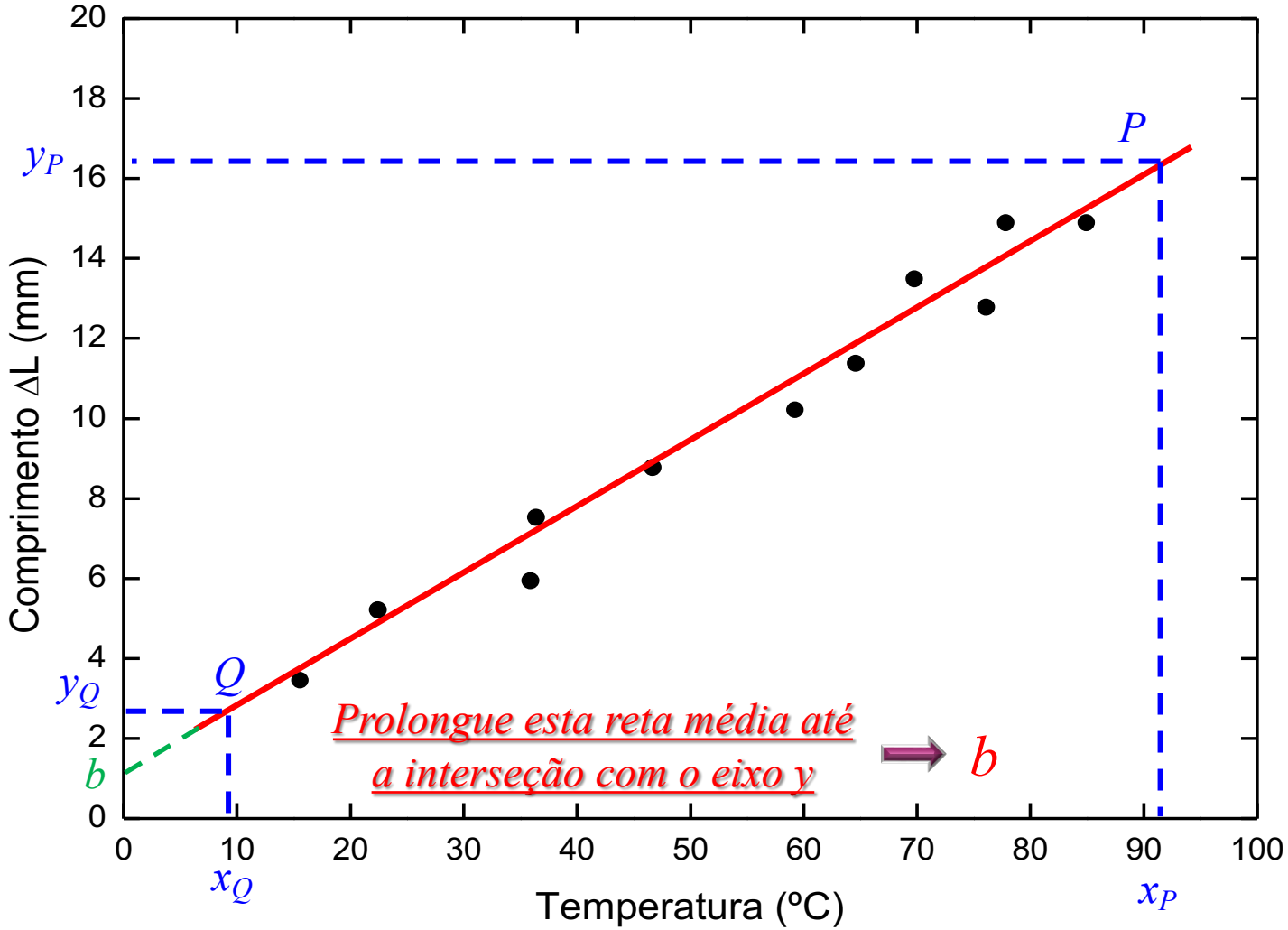
onde ***m*** é o ***coeficiente angular*** da reta, descrito pela inclinação da reta, e ***b*** é o ***coeficiente linear*** , descrito pela interseção da reta com o eixo das ordenadas

Portanto, temos:

$$\begin{array}{lcll} L & \Leftrightarrow & y & \textit{(variável)} \\ \Delta T & \Leftrightarrow & x & \textit{(variável)} \\ L_0 & \Leftrightarrow & b & \textit{(constante)} \\ \alpha L_0 & \Leftrightarrow & m & \textit{(constante)} \end{array}$$

Gráficos

Análise Gráfica



✓ *Traça-se a reta média*

✓ *Tome dois pontos sobre a reta média*

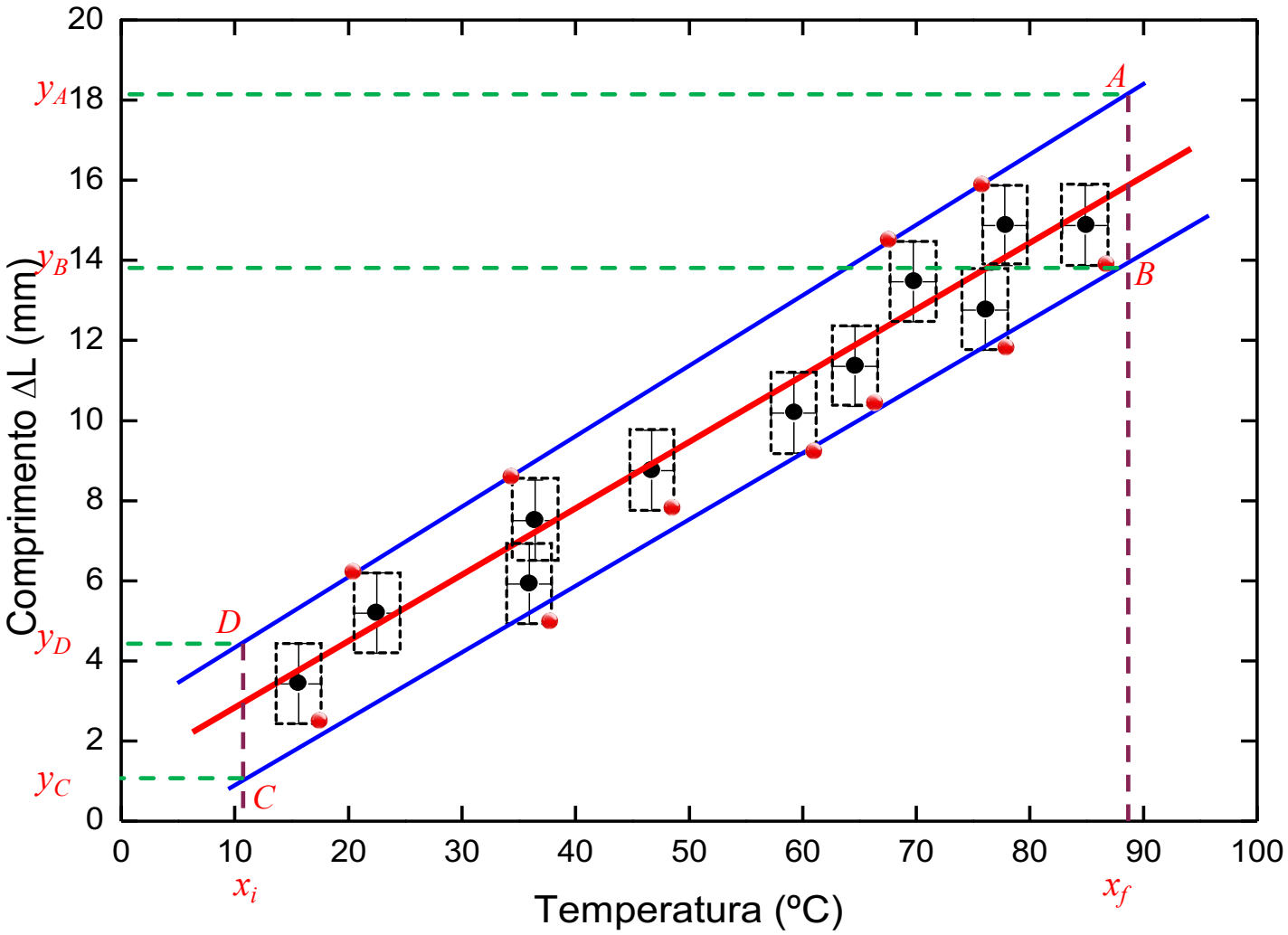
➔ *Fora dos pontos experimentais*

✓ *Determine o coeficiente angular desta reta média*

$$m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$$

Gráficos

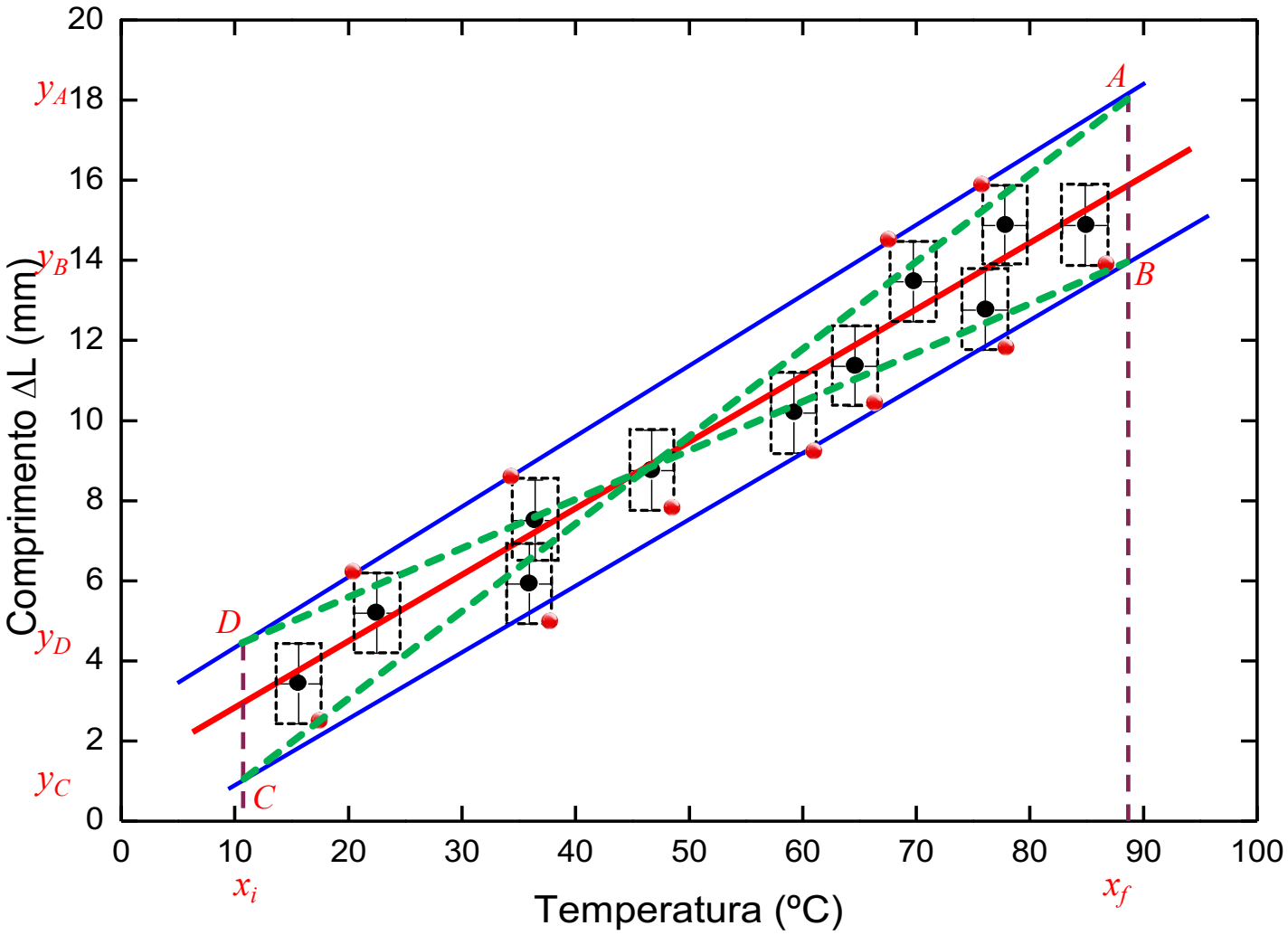
Análise Gráfica



- ✓ *Barras de incerteza das medidas*
- ✓ *Desenhe um retângulo com as dimensões das incertezas*
- ✓ *Determine os pontos sobre os retângulos que estão mais distantes da reta média*
- ✓ *Trace duas retas auxiliares com estes novos pontos*
- ✓ *Determine quatro pontos auxiliares sobre as retas auxiliares*

Gráficos

Análise Gráfica



A incerteza no coeficiente angular será dado por:

$$\pm\Delta m = \pm\frac{1}{2}\left(m_{\sup} - m_{\inf}\right)$$

onde:

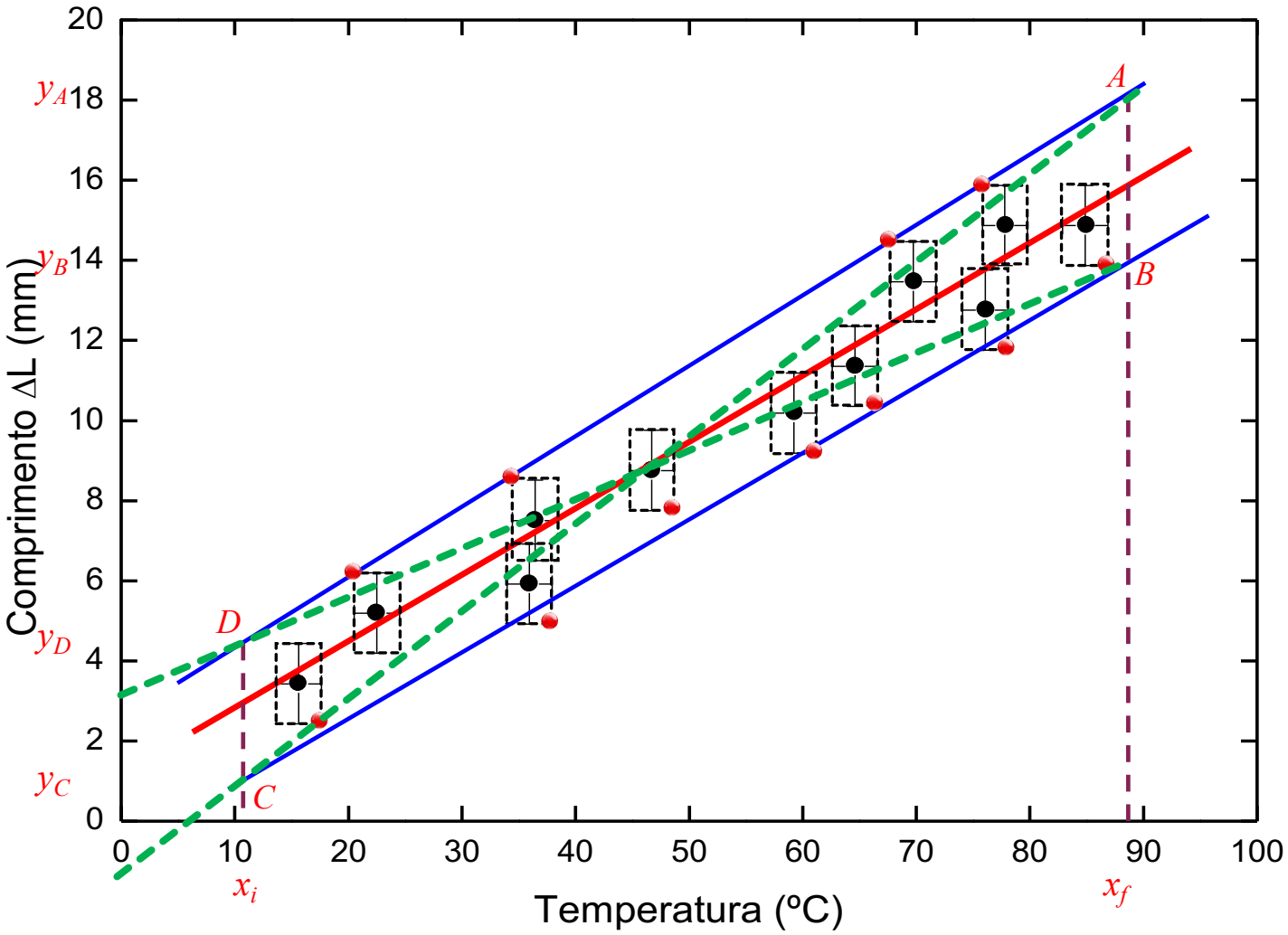
$$m_{\sup} = \frac{y_A - y_C}{x_f - x_i} \qquad m_{\inf} = \frac{y_B - y_D}{x_f - x_i}$$

$$\pm\Delta m = \pm\frac{1}{2}\left(\frac{\left(y_A - y_C\right) - \left(y_B - y_D\right)}{x_f - x_i}\right)$$

Há erros neste gráfico?

Gráficos

Análise Gráfica

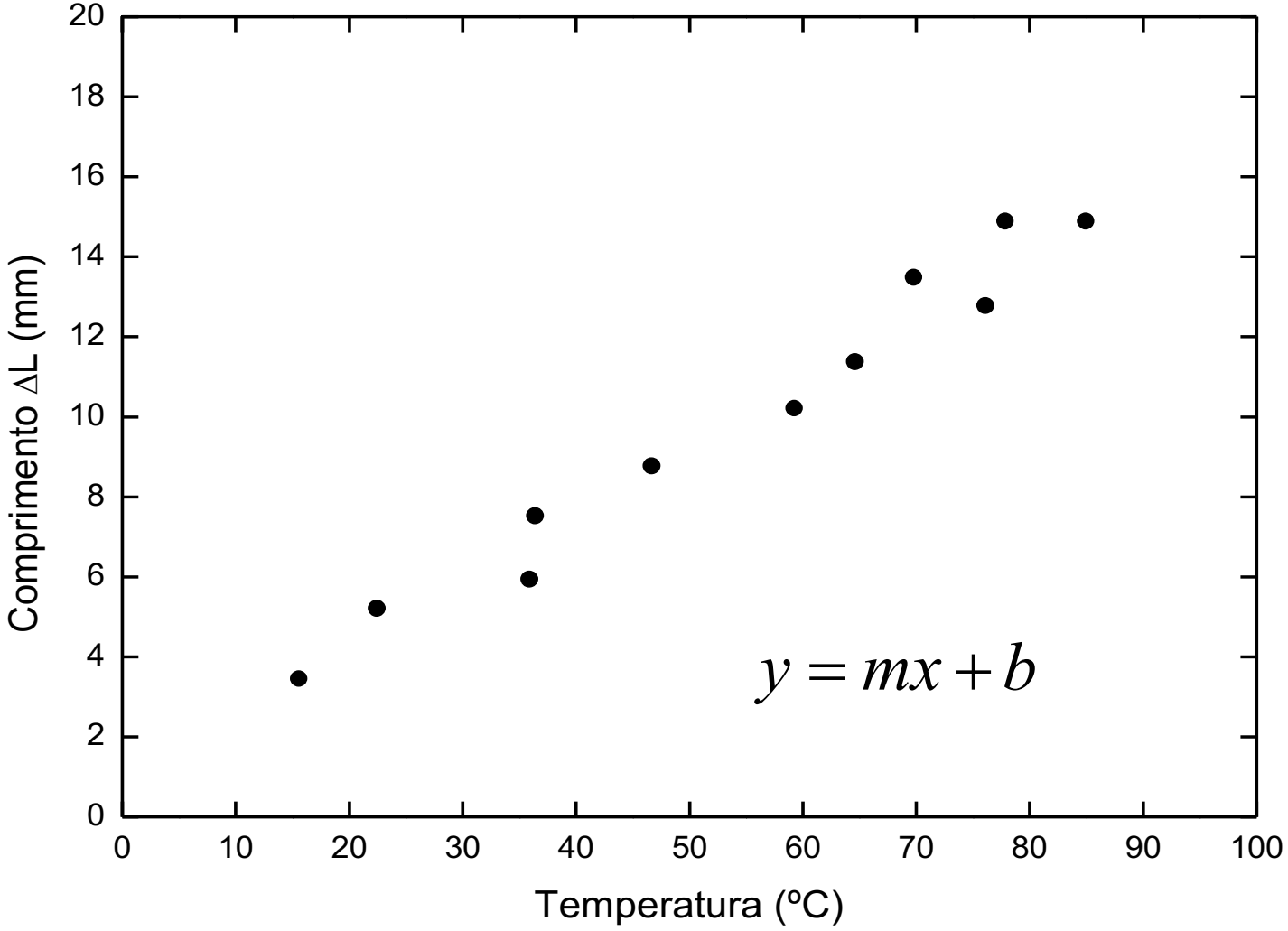


A incerteza no coeficiente linear é dado pela interseção das duas diagonais com o eixo y

$$\pm\Delta b = \pm\frac{1}{2}\left(b_{\sup} - b_{\inf}\right)$$

Gráficos

Análise Gráfica – Métodos dos Mínimos Quadrados



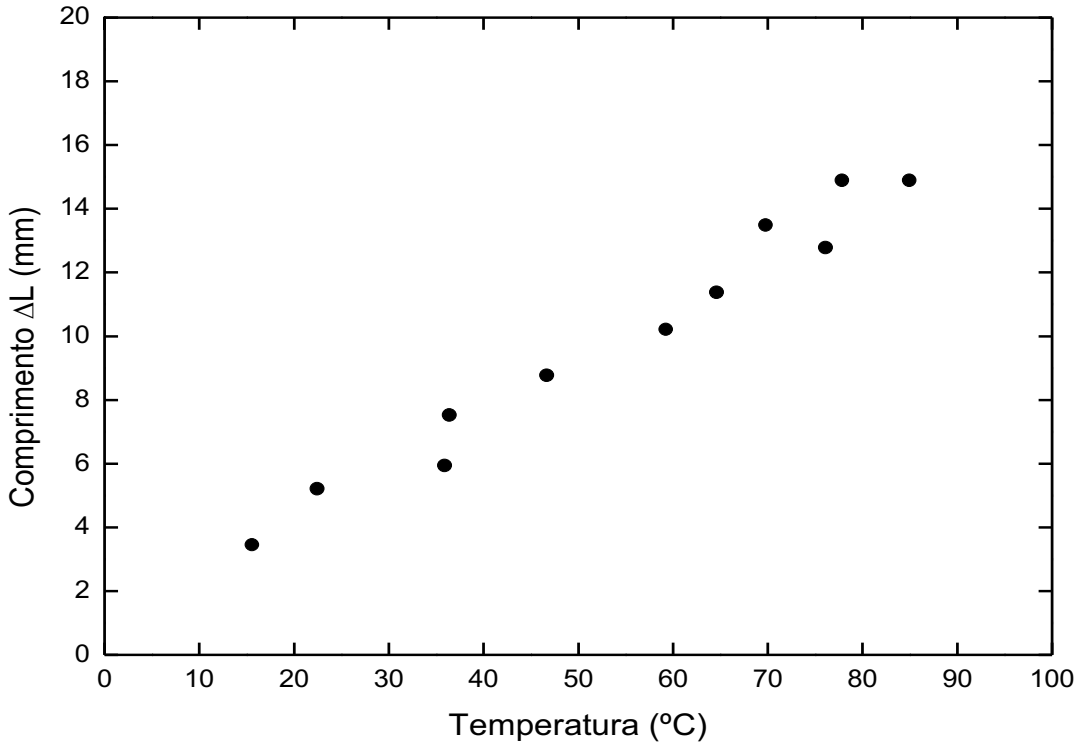
O ajuste de curvas pelo método dos mínimos quadrados é importante, pois ao contrário do método gráfico, é independente da avaliação do experimentador.

Este método consiste em minimizar o erro quadrático médio (S) das medidas. Considere então um conjunto de N medidas (y_i, x_i).

$$S = \sum_{i=1}^{N} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{N} (y - y_i)^2$$

Gráficos

Análise Gráfica – Métodos dos Mínimos Quadrados



Minimizar uma função em relação a certas variáveis é encontrar o menor valor possível para a variável.

$$S = \sum_{i=1}^{N} (m(x - x_i) + 2b)^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial m} = 0 \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

$$m = \frac{N \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

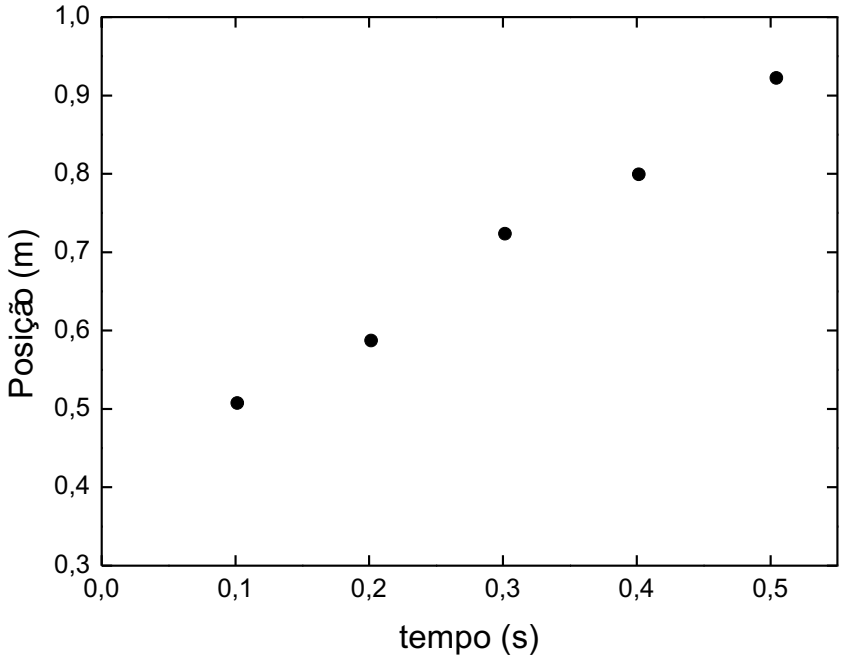
Gráficos

Análise Gráfica – Métodos dos Mínimos Quadrados

Tempo (s)	Posição (m)
0,100	0,51
0,200	0,59
0,300	0,72
0,400	0,80
0,500	0,92

Tempo (s)	Posição (m)	xy	x^2
0,100	0,51	0,051	0,0100
0,200	0,59	0,12	0,0400
0,300	0,72	0,22	0,0900
0,400	0,80	0,32	0,160
0,500	0,92	0,46	0,250
Σx = 1,500	**Σy = 3,54**	**Σxy=1,17**	**Σx^2 = 0,550**

Gráfico da posição *versus* tempo para determinação da velocidade



Com esses resultados, basta substituir os valores na fórmulas

$$m = v_0 = \frac{(5\,x\,1,17 - 1,500\,x\,3,54)}{5\,x\,0,550 - (1,500)^2} = 1,08\,\frac{m}{s} = 1,1\,\frac{m}{s}$$

$$b = x_0 = \frac{(0,550\,x\,3,54 - 1,17\,x\,1,500)}{5\,x\,0,550 - (1,500)^2} = 0,40\,m$$

Gráficos

Análise Gráfica – Métodos dos Mínimos Quadrados – Calculadora

Vamos mostrar como calcular os coeficientes a e b de uma equação linear, usando a calculadora, bem como, as incertezas. Iremos utilizar um calculadora do tipo *Casio Fx* (comum), mas é valido para quase todos os tipos de calculadora.

$$y = a + bx$$

Gráficos

Análise Gráfica – Métodos dos Mínimos Quadrados – Calculadora

1º passo – Limpando as memórias.

Shift → Mode

Quando aciona estas duas teclas aparece no display a seguinte mensagem.

```
Scl   Mode   All
 1     2     3
```

Como queremos limpar TODAS AS MEMÓRIAS, devemos teclar 3. Aparecerá no display:

```
Reset All
              0
```

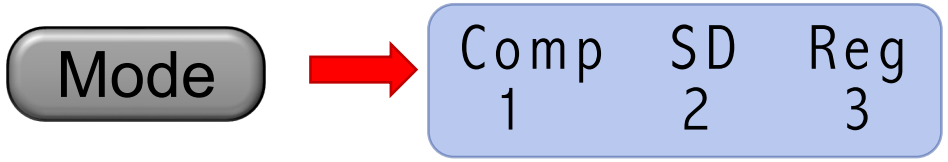
As memórias ainda não estão limpas, você deve clicar no sinal de igual

```
Reset All
 --------------
```

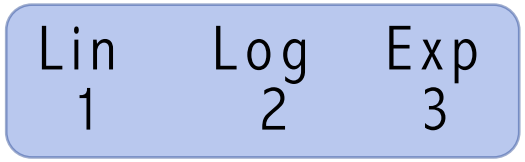
Gráficos

Análise Gráfica – Métodos dos Mínimos Quadrados – Calculadora

2º passo – Entrando modo Regressão Linear



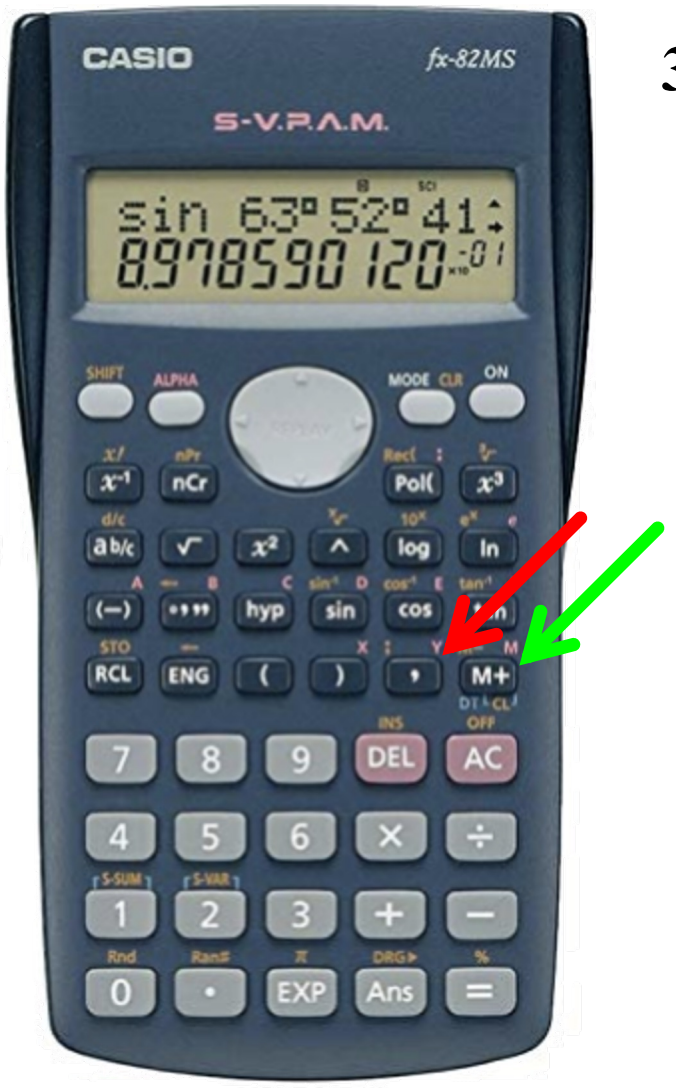
Tecle agora no teclado numérico, o número 3 (Reg) (de regressão), aparecerá no display



Tecle 1. Agora sua calculadora esta no modo de regressão linear

Gráficos

Análise Gráfica – Métodos dos Mínimos Quadrados – Calculadora



3º passo – Entrando com os dados.

→ x_1 → , → y_1 → $M+$

No display aparece "$n = 1$", que significa, "você colocou um ponto".

n =

1

Tempo (s)	Posição (m)
0,100	0,51
0,200	0,59
0,300	0,72
0,400	0,80
0,500	0,92

Continue colocando cada um dos pontos da mesma forma que o primeiro.

Gráficos

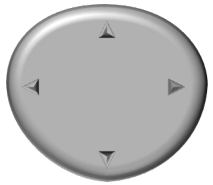
Análise Gráfica – Métodos dos Mínimos Quadrados – Calculadora

4º passo – Lendos os Resultados

Lembrando que: $y = a + bx$

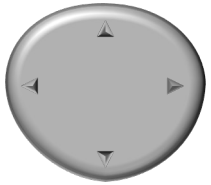
Shift → 2 *S-VAR*

$\bar{x}$	$x\sigma n$	$x\sigma n - 1$
1	2	3



Se correr para direita

$\bar{y}$	$y\sigma n$	$y\sigma n - 1$
1	2	3



para direita

a	b	r
1	2	3

Tempo (s)	Posição (m)
0,100	0,51
0,200	0,59
0,300	0,72
0,400	0,80
0,500	0,92

Gráficos

Análise Gráfica – Métodos dos Mínimos Quadrados – Calculadora

4º passo – Lendos os Resultados

Lembrando que: $y = a + bx$

a	b	r
1	2	3

1➔ a (Coeficiente linear),

2➔ b (Coeficiente angular)

3➔ r (Coeficiente de correlação).

Lembre sempre de apertar o "="

Tempo (s)	Posição (m)
0,100	0,51
0,200	0,59
0,300	0,72
0,400	0,80
0,500	0,92

Gráficos

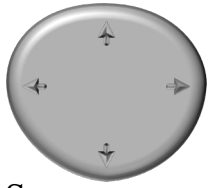
Análise Gráfica – Métodos dos Mínimos Quadrados – Calculadora

5º passo – Calculando as incertezas

Lendo os valores dos somatórios ($\sum x$, $\sum x^2$, $\sum x2$, $\sum x.y$, $\sum y$, etc.).

Tempo (s)	Posição (m)
0,100	0,51
0,200	0,59
0,300	0,72
0,400	0,80
0,500	0,92

$\sum x^2$	$\sum x$	n
1	2	3



Se correr para direita

$\sum y^2$	$\sum y$	$\sum xy$
1	2	3

Caso queiramos o $\sum x$, basta teclarmos 2, e "igual".

Para vermos os outros somatórios devemos repetir o procedimento, teclando o número pedido.

Gráficos

Análise Gráfica – Métodos dos Mínimos Quadrados – Calculadora

5º passo – Calculando as incertezas

Basta anotar os valores e utilizar as equações abaixo para calcular as incertezas

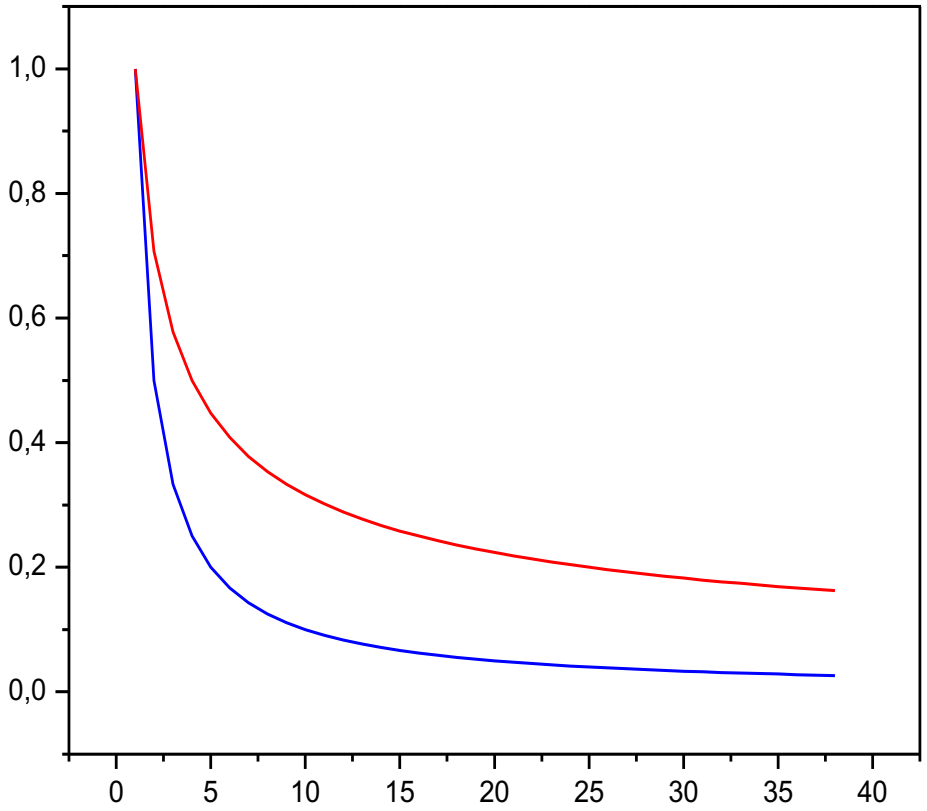
$$\Delta a = \sqrt{\frac{S \sum x_i^2}{(n-2)(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)}}$$

$$\Delta b = \sqrt{\frac{n}{(n-2)} \frac{S}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

Tempo (s)	Posição (m)
0,100	0,51
0,200	0,59
0,300	0,72
0,400	0,80
0,500	0,92

$$S = \sum y_i^2 + b^2 \sum x_i^2 - 2b \sum x_i y_i - 2a \sum y_i + 2ba \sum x_i + na^2$$

Gráficos não Lineares



$$\frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\sqrt{x}}\,?$$

Linearização de Gráficos

É um processo bastante simples, envolvendo apenas uma mudança de variáveis. Através desta simples mudança, pode-se transformar em retas, mesmo equações muito complicadas. Vejamos uns exemplos que nos ensinam como fazer esta linearização.

$$y = kR^n$$

onde k = constante.

Para linearizar esta reta, vamos chamar $x = R^n$. Agora teremos então:

$$y = kx$$

que é a equação de uma reta, que passa pela origem ($b = 0$), e possui inclinação igual a "k". Plotar um gráfico "$y \times x$" representa o mesmo que plotar um gráfico "$y \times R^n$".

Linearização de Gráficos

Como muitos processos físicos são mais bem explicados com funções matemáticas não-lineares, foram desenvolvidos modelos não-lineares que se tornam lineares depois de uma transformação com logaritmos naturais *ln,* como mostra a tabela seguinte.

Tipo	Equação	Transformação	Variável x	Variável y
Linear	$y = a + bx$	$y = a + bx$	x	y
Exponencial	$y = ae^{bx}$	$\ln y = \ln a + bx$	x	$\ln y$
Logarítmica	$y = a + b \ln x$	$y = a + b \ln x$	$\ln x$	y
Potência	$y = ax^b$	$\ln y = \ln a + b \ln x$	$\ln x$	$\ln y$

Na primeira linha dessa tabela foi registrada a equação da regressão linear simples conhecida.

Nas outras três linhas da tabela estão registradas três funções não-lineares e as transformações das variáveis x e y para torná-las funções lineares semelhantes à da primeira linha da tabela.

Bibliografia

Bibliografia básica

Tipler, P.A.; Mosca, G.; Física para Cientistas e Engenheiros: Mecânica, Oscilações e Ondas, Termodinâmica, vol.1, 6.Ed., Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2006. (Seções 1.1-1.5)

Bibliografia complementar

Halliday, D.; Resnick, R.; WALKER, J.; Fundamentos de Física. vol. 1, 8.Ed., Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009. (Seções 1.1-1.7)

Serway R.A.; Jewett, Jr. J.W.; Princípios de Física: Mecânica Clássica, 1.Ed., São Paulo: Cengage Learning, 2001. (Seções 1.3-1.6)