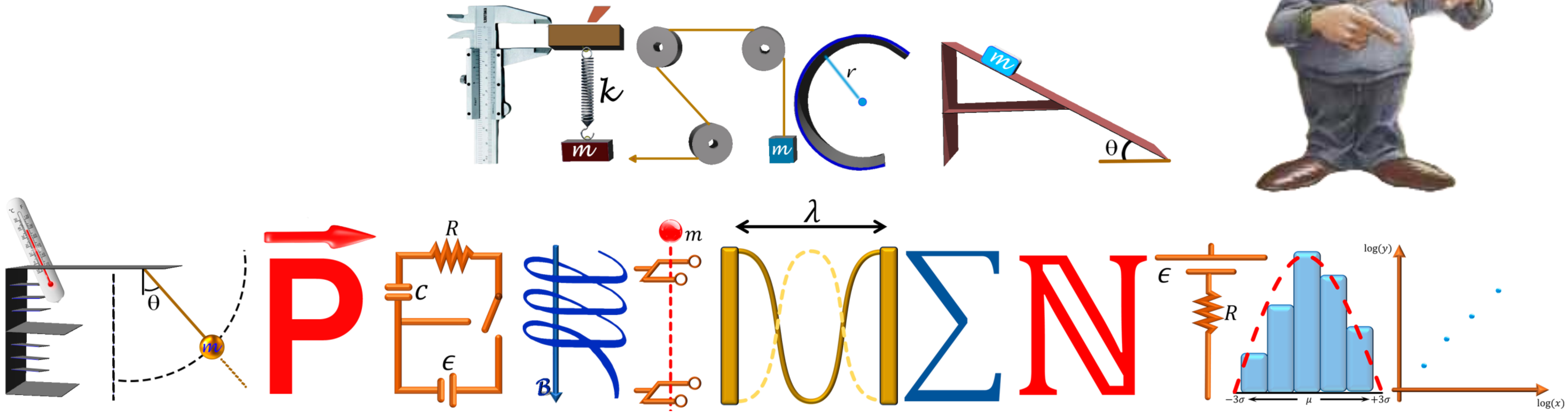
UNIVERSIDADE FEDERAL
DO ESPÍRITO SANTO



Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Exatas - CCE
Departamento de Física - DFIS

Revisão Algarismos Significativos

Operação de *adição*, *subtração*, *multiplicação* e *divisão*

→ *Adição*

$$20,23 + 17,853 + 23,78 + 2,6 = 64,463$$

$$= 64,5$$

Maior ordem da avaliação!

→ *Subtração*

$$154,75 - 110,1 = 44,65$$

$$= 44,7$$

Maior ordem da avaliação!

→ *Multiplicação*

$$18,56 \times 6,82 = 126,5792$$

$$= 127 \text{ (três algarismos significativos)}$$

Menor número de significativos!

→ *Divisão*

$$\frac{68,32}{3,2} = 21,35$$

$$= 21 \text{ (dois algarismos significativos)}$$

Menor número de significativos!

Revisão Algarismos Significativos

Exemplo – 1: As grandezas comprimentos A e B de uma placa retangular foram medidas (3 vezes cada) com o mesmo equipamento e os valores são $A = \bar{a} = 20{,}25\ cm$ e $B = \bar{b} = 9{,}8\ cm$. Pede-se:

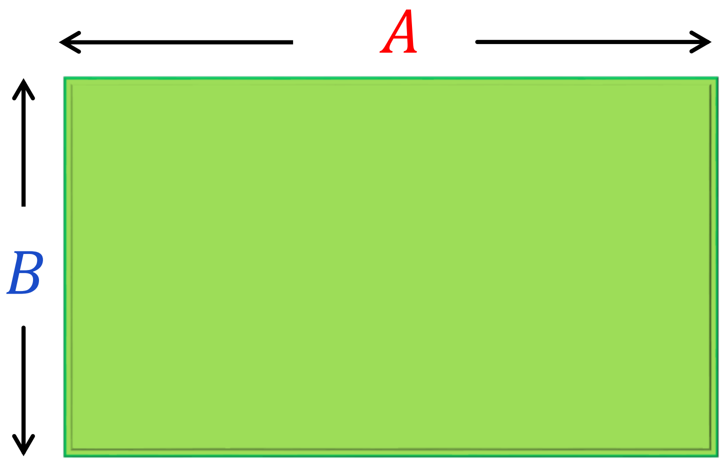
a) Qual a inconsistência nos dados apresentados?

b) Então, qual a maneira correta de se exprimir o lados A e B**?**

c) Determine o perímetro ($P = \bar{p}$) da placa;

d) Determine a área ($S = \bar{s}$) da placa;

e) Represente P e S em notação científica e no SI.



OBS1: Por exemplo, $\bar{b}$ corresponde a um valor médio da grandeza

OBS2: Em português, os decimais são separados por vírgulas.

Teoria de Erros e Medidas

Medidas Físicas

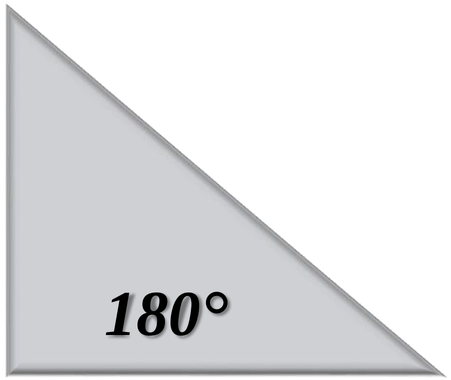
- ✓ *Medidas diretas*: resultado da leitura de uma magnitude diretamente no equipamento ou aparelho de medida.

- ✓ *Medidas indiretas*: é a resultante da aplicação de relações matemáticas para a obtenção de uma grandeza que esta vinculada a outra facilmente medida.

$$v = \frac{S}{\Delta t}$$

Teoria de Erros e Medidas

Erros e *Desvios*



Quanto vale a soma dos ângulos de triângulo?

S Soma dos ângulos	Diferença entre o Valor Obtido S e o Valor Real (180º)
$179{,}8\,^{o}$	$-0{,}2\,^{o}$
$180{,}4\,^{o}$	$0{,}4\,^{o}$
$180{,}0\,^{o}$	$0{,}0\,^{o}$
$180{,}6\,^{o}$	$0{,}6\,^{o}$
$179{,}7\,^{o}$	$-0{,}3\,^{o}$

Em condições normais de pressão, mediu-se a temperatura da água em ebulição e obteve-se o valor $98{,}2\ °C$. A diferença entre o valor obtido e o valor considerado verdadeiro dessa grandeza é $-1{,}8\ °C$. Este valor é um *Erro* ou *Desvio*?

Mediu-se com uma régua a aresta de um cubo, obtendo o valor de $1{,}23\ cm$. Este é o *valor real* desta grandeza ou o *mais aproximado*?

Teoria de Erros e Medidas

Erros e *Desvios*

Algumas grandezas possuem seus valores reais conhecidos e outras não. Quando conhecemos o valor real de uma grandeza e experimentalmente encontramos um resultado diferente, dizemos que o valor obtido está afetado de um *ERRO*, definido como:

Erro ⇒ Diferença entre um valor experimentado (V_{obs}) ao se medir uma grandeza e o seu valor real (V_{real}) ou correto.

$$Erro = V_{obs} - V_{real}$$

Teoria de Erros e Medidas

Erros e *Desvios*

Conhecemos o valor *real* ou *exato* da maioria das grandezas físicas?

A aceleração da gravidade ⇒ O valor tabelado é absoluto ou o mais provável da grandeza?

Nestas condições, faz sentido falar no verdadeiro valor da grandeza?

Desvios ⇒ Diferença entre o valor experimentado (V_{obs}) ao se medir uma grandeza e o seu valor adotado (V_{adot}).

$$Desvio = V_{obs} - V_{adot}$$

Teoria de Erros e Medidas

Erros e *Desvios*

Em *Ciências*, se trabalha com *Desvios* e não com *Erros*!

Desvio Relativo ➡ é a relação entre o desvio absoluto e o valor adotado como o mais próximo do valor real desta grandeza. Definição de resolução da medida!

$$Desvio\ Relativo = \frac{Desvio}{V_{adot}}$$

Exemplo: Um operador dispondo de um mesmo instrumento efetuou a medida de duas grandezas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Em cada um dos casos é conhecido o valor mais provável de cada grandeza. Vejam os valores de desvios e desvios relativos para constatar a importância!

Grandeza $\overline{AB}$		Grandeza $\overline{CD}$	
Valor Obtido	$8{,}00\ cm$	Valor Obtido	$19{,}4\ cm$
Valor Mais Provável	$8{,}40\ cm$	Valor Mais Provável	$20{,}0\ cm$
Desvio Absoluto	$0{,}40\ cm$	Desvio Absoluto	$0{,}6\ cm$
Desvio Relativo	4,7 %	Desvio Relativo	3 %

Teoria de Erros e Medidas

Classificação dos tipos de Erros cometidos ao se medir uma grandeza

- ✓ Erros grosseiros ➡ ***Imperícia ou distração do operador***
- ✓ Erros sistemáticos ➡ ***Causados por fontes identificáveis***

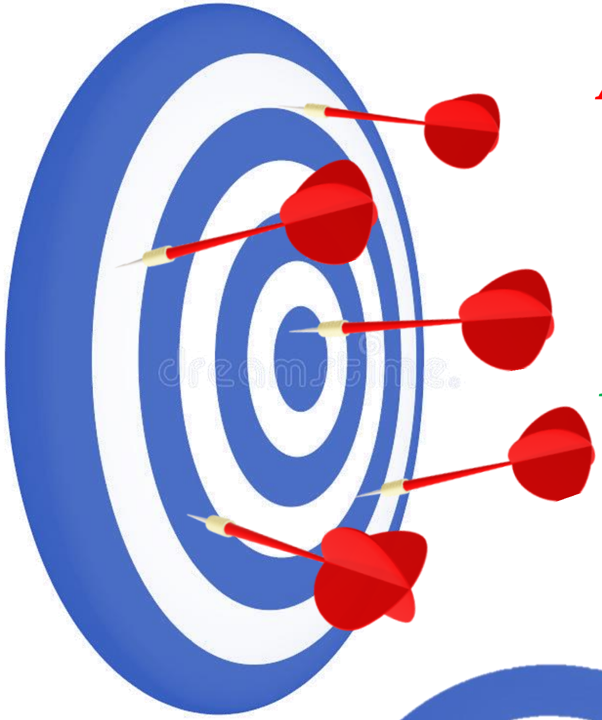
Estes erros fazem com que as medidas efetuadas estejam consistentemente acima ou abaixo do **valor real do objeto**

- ➢ O instrumento ➡ *Tempo medido com um relógio que atrasa*
- ➢ O método de observação ➡ *Efeito de paralax*
- ➢ Efeitos ambientais ➡ *Comprimento de barra de metal ➔ T*
- ➢ Modelo teórico ➡ *Efeito da resistência do ar ➔ queda livre*

- ✓ Erros Aleatórios ➡ ***Escapam a uma análise em função de sua imprevisibilidade***

Teoria de Erros e Medidas

Acurácia e Precisão?

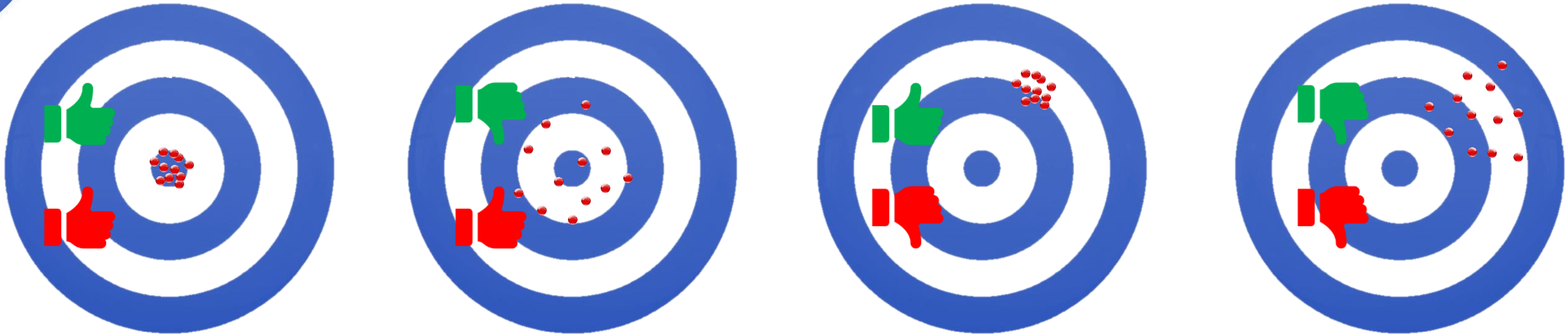


Acurácia Relacionada a proximidade com o valor real/adotado da medida.

➔ Relacionada a erros sistemáticos e aleatórios

Precisão Relacionada ao grau de consistência das medidas obtidas com a sua média.

➔ Relacionada somente a erros aleatórios



Teoria de Erros e Medidas

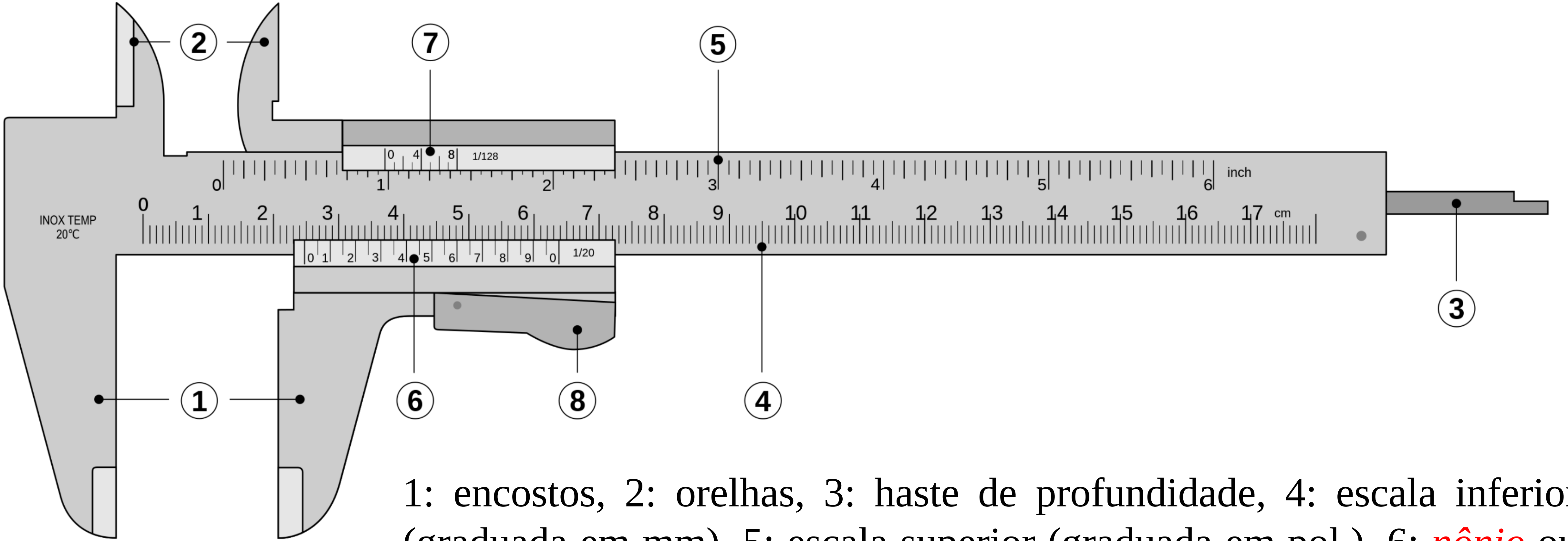
Instrumentos de Medidas

Grandeza	Aparelho	Precisão
Comprimento	Régua centimetrada	1 cm
Comprimento	Régua milimetrada	1 mm
Comprimento	Paquímetro	0,1 mm

Teoria de Erros e Medidas

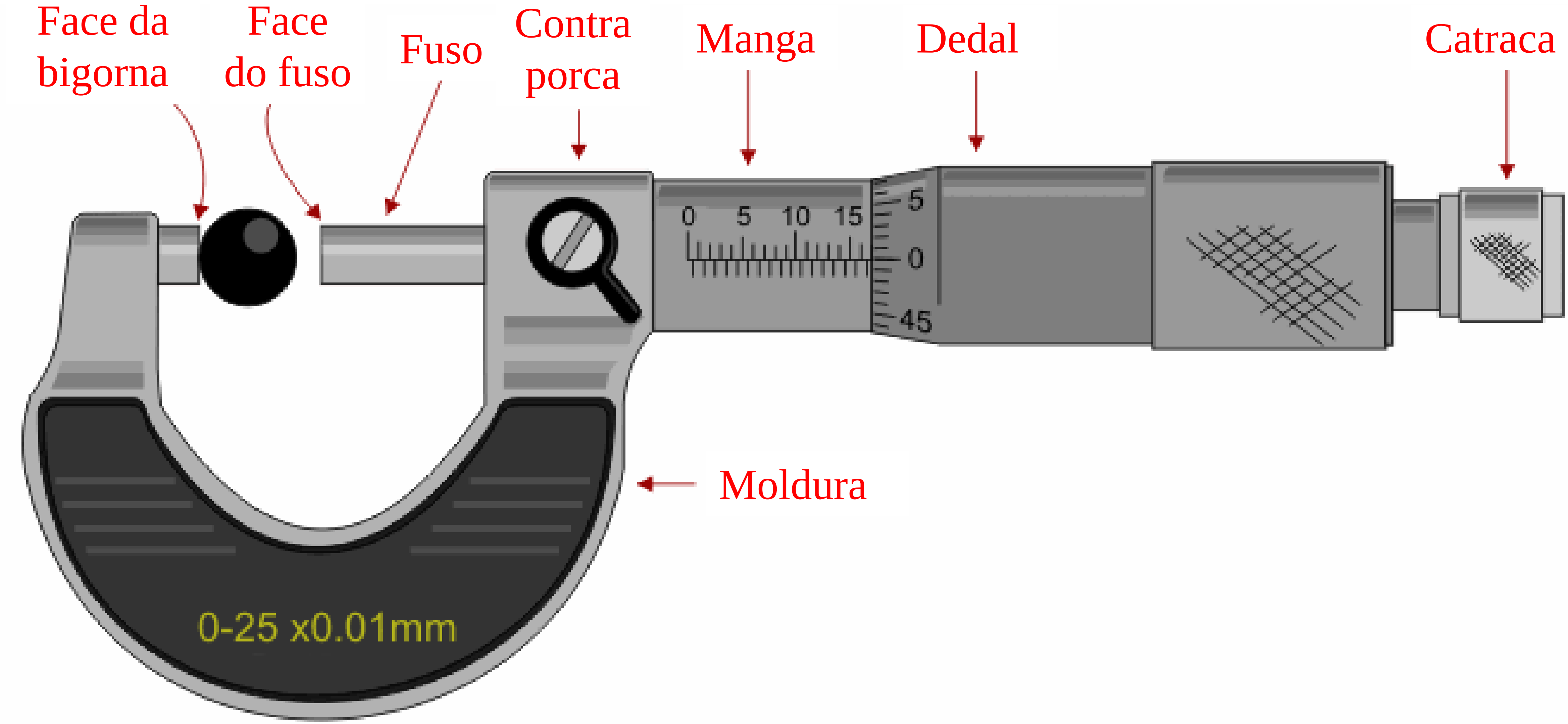
Instrumentos de Medidas

Paquímetro: Equipamento com precisão, no mínimo, em décimos de mm

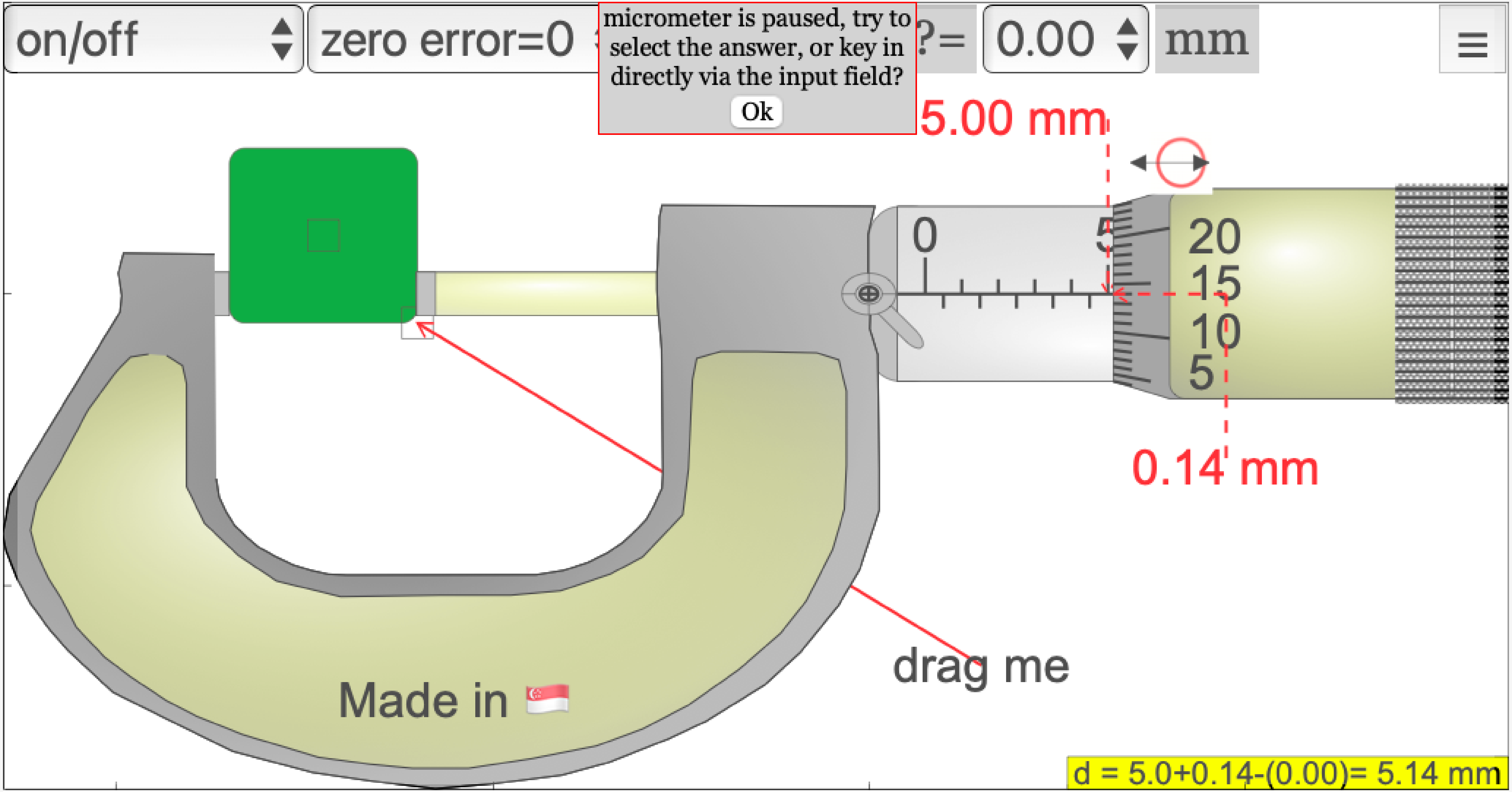


1: encostos, 2: orelhas, 3: haste de profundidade, 4: escala inferior (graduada em mm), 5: escala superior (graduada em pol.), 6: *nônio* ou *vernier* inferior (mm), 7: *nônio* ou *vernier* superior (pol.), 8: trava.

Micrômetro



Face da bigorna
Face do fuso
Fuso
Contra porca
Manga
Dedal
Catraca
Moldura
0 5 10 15
5
0
45
0-25 x0.01mm


on/off
zero error=0
micrometer is paused, try to select the answer, or key in directly via the input field?
Ok
?=
0.00
mm
5.00 mm
0
5
20
15
10
5
0.14 mm
drag me
Made in
d = 5.0+0.14-(0.00)= 5.14 mm

Teoria de Erros e Medidas

Instrumentos de Medidas

Grandeza	Aparelho	Precisão
Comprimento	Régua centimetrada	1 cm
Comprimento	Régua milimetrada	1 mm
Comprimento	Paquímetro	0,1 mm
Massa	*Balança Digital* $\left(\Delta m/_{m} \times 100\right)$	*1 % na incerteza relativa*
Tempo	Cronômetro	0,01s até 0,0001s

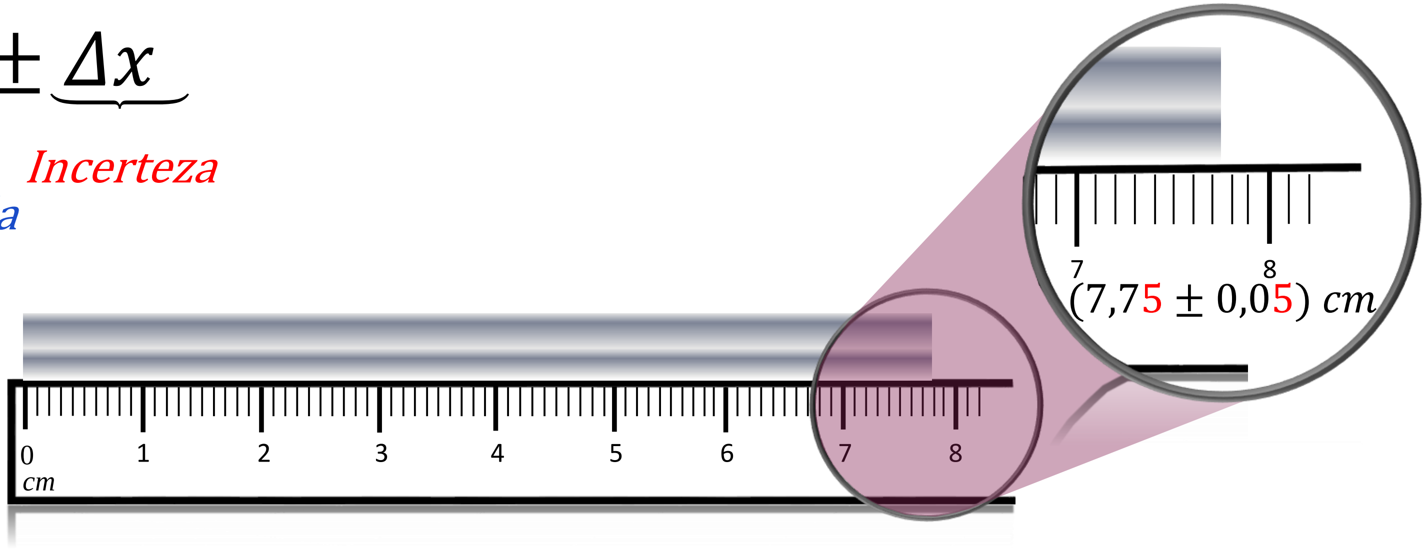
Teoria de Erros e Medidas

Medida INERENTE ***Erro***

Poderá ser minimizado eliminando-se o máximo fontes de erro.

Avaliar quantitativamente as *incertezas* nas medições.

$$\underbrace{x}_{\text{Valor medida}} \pm \underbrace{\Delta x}_{\text{Incerteza}}$$



Teoria de Erros e Medidas

Incertezas em Medidas Diretas

Medindo-se uma única vez

$$x \pm \Delta x$$

Medindo-se ***N*** vezes a mesma grandeza

$$x = x_m \pm \Delta x$$

$$x_m = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{N}$$

Incerteza na medida e pode se determinada a partir dos dados experimentais

Teoria de Erros e Medidas

Incerteza absoluta ⇒ $$\Delta x = \sum_{i=1}^{N} \frac{|x_m - x_i|}{N}$$

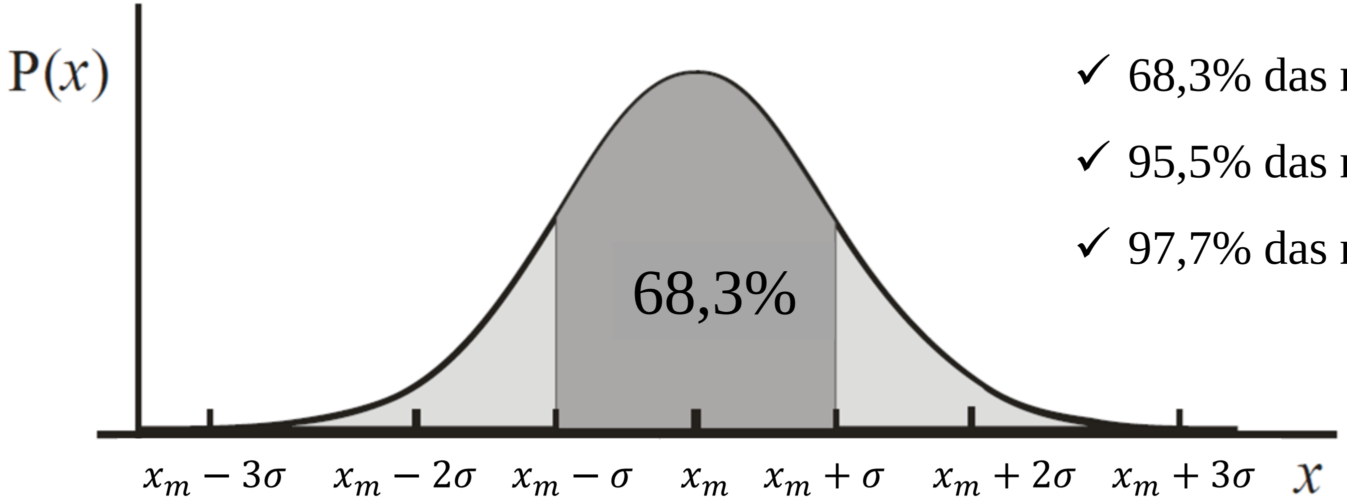
Desvio Padrão ⇒ $$\Delta x = \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_m - x_i)^2}{N}}$$

$$\Delta x = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_m - x_i)^2}{N-1}}$$

Se tivermos um pequeno número de medidas

Teoria de Erros e Medidas

Quando há um número grande de medidas (~1000 experimentos e.g.) a curva de distribuição de frequência das medidas segue usualmente à distribuição de Gauss, tendo as seguintes características:



- ✓ 68,3% das medidas estão entre $(x_m - \sigma)$ e $(x_m + \sigma)$
- ✓ 95,5% das medidas estão entre $(x_m - 2\sigma)$ e $(x_m + 2\sigma)$
- ✓ 97,7% das medidas estão entre $(x_m - 3\sigma)$ e $(x_m + 3\sigma)$

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{(x_m - x_i)^2}{2\sigma^2}}$$

Teoria de Erros e Medidas

Incertezas em Medidas Indiretas $\left\{ \right.$ Geralmente é necessário usar valores medidos e afetados por incertezas para realizar cálculos a fim de se obter o valor de outras grandezas indiretas.

$$V = f(x \pm \Delta x, y \pm \Delta y, \dots)$$

Soma ou *Subtração*

$$\left.\begin{array}{c} A = a \pm \Delta a \\ B = b \pm \Delta b \\ C = c \pm \Delta c \\ \vdots \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a,\ b,\ c, \cdots = \text{valores medidos} \\ \pm\Delta a,\ \pm\Delta b,\ \pm\Delta c, \cdots = \text{incertezas absolutas} \end{pmatrix}$$

$$S = A + B + C + \cdots = s \pm \Delta s \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} s = \text{valor calculado da soma} \\ \pm\Delta s = \text{incerteza absoluta da soma} \end{array} \right\}$$

Teoria de Erros e Medidas

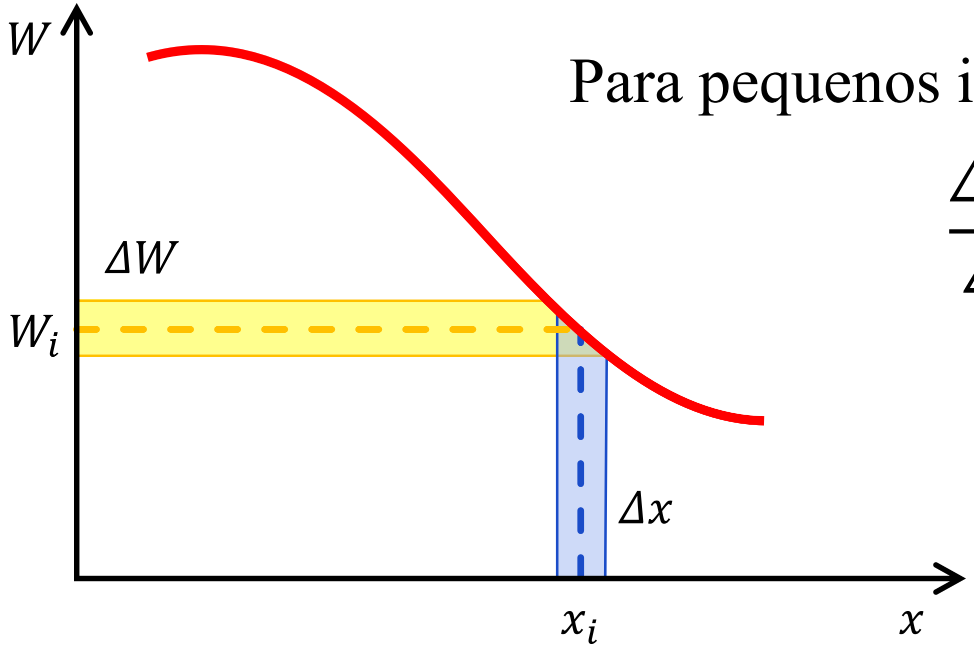
Incertezas em Medidas Indiretas

Geralmente é necessário usar valores medidos e afetados por incertezas para realizar cálculos a fim de se obter o valor de outras grandezas indiretas.

$$W = f(x \pm \Delta x, y \pm \Delta y, z \pm \Delta z)$$

O problema pode ser posto da seguinte maneira: dada uma função $W = (x, y, z)$ onde x, y, z são grandezas experimentais com incertezas dadas por $\Delta x, \Delta y$ e Δz independentes entre si, quanto vale ΔW?

Para simplificar suponha W apenas função de x.



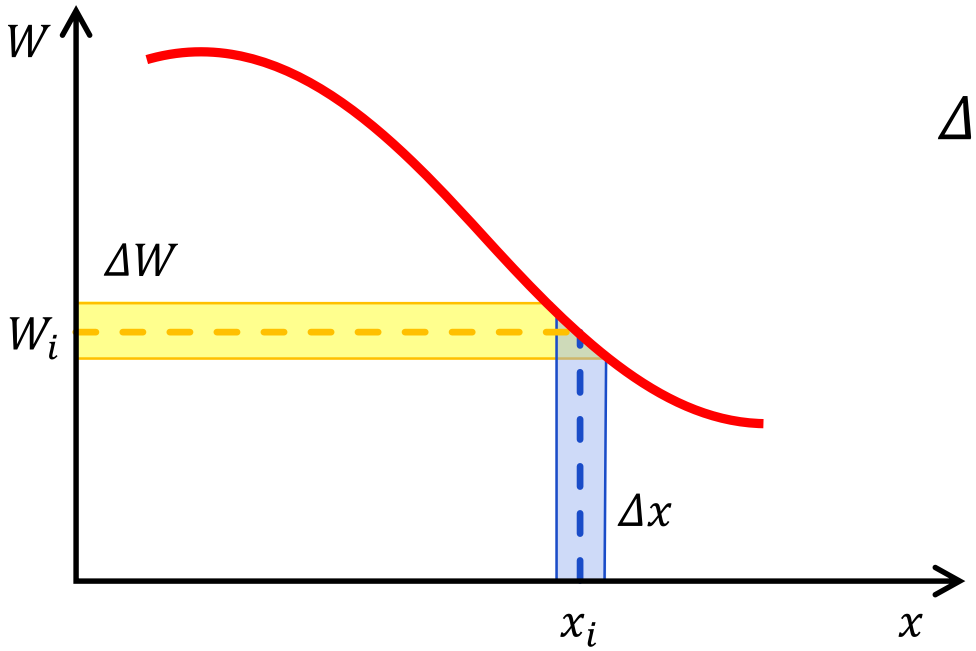
Para pequenos intervalos no eixo x:

$$\frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{dW}{dx}$$

$$\Delta W = \left|\frac{dW}{dx}\right| \Delta x$$

Teoria de Erros e Medidas

Para mais de uma variável, todas independentes entre si, podemos escrever uma fórmula geral (visualize uma soma de catetos em n dimensões):



$$\Delta W^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 \Delta y^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 \Delta z^2$$

$$\Delta W^2 = \sum_{a_i} \left(\frac{\partial W}{\partial a_i}\right)^2 \Delta {a_i}^2$$

Critério quadratura

Teoria de Erros e Medidas

Exemplo: Considere a soma de dois segmentos L_1 e L_2:

$$L_1 = (1{,}0000 \pm 0{,}0003)\ m \qquad\qquad L_2 = (0{,}0123 \pm 0{,}0005)\ m$$

$$L = ?$$

$$L = (1{,}0123 \pm \Delta L)m$$

$$\Delta L^2 = \sum_{a_i} \left(\frac{\partial L}{\partial a_i}\right)^2 \Delta {a_i}^2 = 1(0{,}0003)^2 + 1(0{,}0005)^2 = 0{,}00000034$$

$$\Delta L = 0{,}0005830 \qquad \Rightarrow L = (1{,}0123 \pm 0{,}0006)m$$

Exemplo: Considere agora a diferença entre os dois segmentos L_1 e L_2:

$$\Rightarrow L = (0{,}9877 \pm 0{,}0006)m$$

Teoria de Erros e Medidas

Exemplo: Exemplo: Calcule o volume do cilindro cujo o raio vale: $R = (2{,}0 \pm 0{,}5)\ mm$ e a altura $L = (10{,}0 \pm 0{,}5)\ mm$.

$$V = \pi R^2 L$$

$$V = (125{,}663706 \pm \Delta V)cm^3$$

$$\Delta V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)^2 \Delta\pi^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)^2 \Delta R^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)^2 \Delta L^2$$

$$\Delta V^2 = (R^2L)^2\Delta\pi^2 + (2\pi RL)^2\Delta R^2 + (\pi R^2)^2\Delta L^2$$

$$\Delta V^2 = (\pi R^2 L)^2\left[\left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\right)^2 + (2)^2\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2\right] = V^2\left[\cancel{\left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\right)^2} + (2)^2\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2\right]$$

$$\Delta V = V\sqrt{\left[(2)^2\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2\right]} = 63{,}1452$$

$$V = (125{,}6637 \pm 63{,}1452)cm^3$$

$$V = (13 \pm 6) \times 10^{-5} m^3$$

Teoria de Erros e Medidas

Multiplicação, *divisão*, *radiciação* e *potenciação*

Utilização do MONÔMIO ➡ $F = K.A.B^{\alpha}.C^{\beta}$

$$A = \bar{a} \pm \Delta a$$
$$B = \bar{b} \pm \Delta b$$
$$C = \bar{c} \pm \Delta c$$

$$K = \bar{k} \pm \Delta k \Rightarrow \text{Constante que não depende da medida}$$

$$F = \bar{f} \pm \Delta f$$

Teoria de Erros e Medidas

Multiplicação, *divisão*, *radiciação* e *potenciação*

$$F = K.A.B^{\alpha}.C^{\beta}$$

$$F = \underbrace{\bar{f}}_{\bar{k}.\bar{a}.\bar{b}^{\alpha}.\bar{c}^{\beta}} \pm \underbrace{\Delta f}$$

$$\Delta W^2 = \sum_{a_i} \left(\frac{\partial W}{\partial a_i}\right)^2 \Delta a_i{}^2$$

$$\pm\Delta f = \pm\bar{f}\sqrt{\left(\frac{\Delta k}{\bar{k}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\alpha\frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\beta\frac{\Delta c}{\bar{c}}\right)^2}$$

Critério quadratura

Teoria de Erros e Medidas

Multiplicação, divisão, radiciação e potenciação

$$F = K.A.B^{\alpha}.C^{\beta}$$

$$F = \underbrace{\bar{f}}_{\bar{k}.\bar{a}.\bar{b}^{\alpha}.\bar{c}^{\beta}} \pm \underbrace{\Delta f}$$

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

$$\pm \Delta f = \pm \bar{f} \left[\left| \frac{\Delta k}{\bar{k}} \right| + \left| \frac{\Delta a}{\bar{a}} \right| + \left| \alpha \frac{\Delta b}{\bar{b}} \right| + \left| \beta \frac{\Delta c}{\bar{c}} \right| \right]$$

Critério mais desfavorável

Teoria de Erros e Medidas

Multiplicação, *divisão*, *radiciação* e *potenciação*

$$F = K.A.B^{\alpha}.C^{\beta}$$

$$\pm\Delta f = \pm\bar{f}\sqrt{\left(\frac{\Delta k}{\bar{k}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\alpha\frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\beta\frac{\Delta c}{\bar{c}}\right)^2}$$

$$\Delta W^2 = \sum_{a_i}\left(\frac{\partial W}{\partial a_i}\right)^2 \Delta a_i{}^2$$

Critério quadratura

$$\pm\Delta f = \pm\bar{f}\left[\left|\frac{\Delta k}{\bar{k}}\right| + \left|\frac{\Delta a}{\bar{a}}\right| + \left|\alpha\frac{\Delta b}{\bar{b}}\right| + \left|\beta\frac{\Delta c}{\bar{c}}\right|\right]$$

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|\Delta x_i$$

Critério mais desfavorável

Teoria de Erros e Medidas

Multiplicação, *divisão*, *radiciação* e *potenciação*

$$F = K.A.B^{\alpha}.C^{\beta}$$

Discussão sobre K (constante)

Esta constante pode aparecer de duas maneiras:

✓Número exato. Quantidade finita de dígitos ➔ incerteza nula

✓Número com quantidade infinita de dígitos (dizimas, irracional, ...)

➔ incerteza dependerá da quantidade de dígitos adotados.

Exemplo: Calcule o volume de uma esfera cujo o raio vale: $R = r \pm \Delta r = (232{,}0 \pm 0{,}1)\ mm$. Neste caso podemos calcular seu volume utilizando uma calculadora com dez dígitos, sem nos preocuparmos com a incerteza que afeta o número π.

$$V = v \pm \Delta v = (5{,}231 \pm 0{,}007) \times 10^{7} mm^{3}$$

Teoria de Erros e Medidas

Argumento de Funções

No caso em que os dados forem usados como argumento de funções ($\sin x$, $\cos x$, $\log x$, $\ln x$, etc):

$$F = f \pm \Delta f = \frac{f_{sup} + f_{inf}}{2} \pm \frac{f_{sup} - f_{inf}}{2}$$

Exemplo: $\cos(30{,}0 \pm 0{,}2)°$

Bibliografia

Bibliografia básica

Tipler, P.A.; Mosca, G.; Física para Cientistas e Engenheiros: Mecânica, Oscilações e Ondas, Termodinâmica, vol.1, 6.Ed., Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2006. (Seções 1.1-1.5)

Bibliografia complementar

Halliday, D.; Resnick, R.; WALKER, J.; Fundamentos de Física. vol. 1, 8.Ed., Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009. (Seções 1.1-1.7)

Serway R.A.; Jewett, Jr. J.W.; Princípios de Física: Mecânica Clássica, 1.Ed., São Paulo: Cengage Learning, 2001. (Seções 1.3-1.6)