Desenvolvimento do Curso

As três primeiras aulas estão reservadas para um estudo introdutório à teoria dos erros, incluindo-se a utilização de gráficos em papel milimetrado e em papel mono-log, com vistas ao tratamento dos dados obtidos no Laboratório. Como exercício poderá ser utilizado um experimento simples, aproveitando partes da experiência A1.

Nas demais aulas serão realizadas experiências, organizadas em unidades com três aulas práticas em cada uma das unidades.

Os alunos serão distribuídos em grupos de dois ou três, e cada grupo desenvolverá uma experiência em cada aula.

Conteúdo da Apostila

Na sua parte inicial, o texto trata, de forma simples, o assunto que será abordado nas três primeiras aulas: conceitos de Erro, Desvio, Incerteza, Algarismos Significativos, bem como o trabalho com gráficos no tratamento de dados experimentais.

O texto contém os roteiros dos experimentos, os modelos das folhas de dados, bem como uma sugestão para a elaboração dos cálculos e confecção do relatório de cada um dos experimentos.

I. Noções Sobre Teoria de Erros[1]

I.1. Erros e Desvios

Para introduzir a noção de erros e desvios e entender as diferenças entre estes dois conceitos, estudemos os exemplos a seguir:

Exemplo 1. Sabemos da geometria euclidiana que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180o. Suponha que, numa determinada situação experimental, os ângulos internos de um dado triângulo são medidos para se obter sua soma. O procedimento é repetido cinco vezes e os valores encontrados estão tabelados abaixo:

S = soma dos ângulos	Valor Obtido - Valor Real
179,8	-0,2
180,4	0,4
180,0	0,0
180,6	0,6
179,7	-0,3

Exemplo 2. Em condições normais de pressão mediu-se a temperatura da água em ebulição e obteve-se o valor 98,2 oC. A diferença, entre o valor obtido e o valor considerado verdadeiro dessa grandeza, é -1,8 oC.

[1] Apresentamos uma abordagem muito simplificada do tratamento de dados; recomendamos a quem já concluiu dois semestres de cálculo a leitura do livro: "Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental", de Otaviano Helene e Vito Vanin, Editora Edgard Blucher

Exemplo 3. O valor da velocidade da luz no vácuo é 299.792.4S8 m/s, por definição (leia Anexo na pág 29). Mediu-se a velocidade da luz no vácuo e obteve-se 2,99800 x 108 m/s; mas o valor real da grandeza é conhecido.

Exemplo 4. Mediu-se a aresta de um cubo com uma régua e obteve-se o valor de 1,23 cm. Neste caso, é conhecido o valor real dessa grandeza?

Exemplo 5. Ao se medir a massa de uma substância, obteve-se o valor de 450,6 g. É este o verdadeiro valor dessa grandeza?

Como mostram os exemplos anteriores, algumas grandezas possuem seus valores reais conhecidos e outras não. Entretanto o valor real ou exato da maioria das grandezas físicas nem sempre é conhecido. Quando conhecemos o valor real de uma grandeza, e experimentalmente encontramos um resultado diferente, dizemos que o valor obtido está afetado de um erro.

Exercício: Mediram-se os ângulos internos de um quadrilátero e obteve-se, para a sua soma, o valor de 361,4o. Qual é o erro de que está afetada esta medida?

Quando afirmamos que a aceleração da gravidade vale 9,79 m/s2 em nosso laboratório, trata-se de seu valor absoluto ou aquele que mais se aproxima do que pode ser considerado o seu valor real? Nestas condições tem sentido falar-se no valor verdadeiro de uma grandeza? Conforme teremos oportunidade de estudar, carece de sentido falar-se em valor real na maioria das medidas.

Apesar de não podermos encontrar o valor real de determinada grandeza podemos adotar, através de critérios que estudaremos oportunamente, um valor que mais se aproxime do valor real, como é o caso da aceleração da gravidade acima citado.

Neste caso, ao efetuarmos uma medida, falamos em Desvios e não em Erros. Os desvios podem ser apresentados sob três formas:

a) Desvio Absoluto: é a diferença entre um valor obtido ao medir-se uma grandeza e um valor adotado que mais se aproxima do valor real. Na prática, trabalha-se na maioria das vezes com desvios e não com erros.

$$\boxed{\text{DESVIO ABSOLUTO = VALOR MEDIDO - VALOR ADOTADO}}$$

b) Desvio Relativo: é a relação entre o desvio absoluto e o valor adotado como o mais próximo do valor real desta grandeza. O desvio relativo nos dá, de certa forma, uma informação a mais acerca da qualidade do processo de medida e nos permite decidir, entre duas medidas, qual foi o processo de medida de melhor qualidade (ver ex. 8).

$$\boxed{\text{DESVIO RELATIVO = DESVIO ABSOLUTO / VALOR ADOTADO}}$$

c) Desvio Relativo Percentual: é obtido, multiplicando-se o desvio relativo por 100 %.

$$\boxed{\text{DESVIO RELATIVO PERCENTUAL = DESVIO RELATIVO } \mathbf{x} \text{ 100\%}}$$

Quando um mesmo operador efetua uma série de medidas de uma grandeza, utilizando um mesmo instrumento, as medidas obtidas terão valores que poderão não coincidir na maioria das vezes, isso devido a fatores pessoais e acidentais. A teoria para o tratamento estatístico de dados demonstra que:

O valor que mais se aproxima do considerado correto ou real, é a Média Aritmética dos Valores (V_m).

Exemplo 6: Um operador, ao medir o comprimento de um tubo com uma régua milimetrada, encontrou os seguintes valores: L1 = 1,2314 m, L2 = 1,231S m, L3 = 1,2314 m, L4 = 1,2313 m. Neste caso, o valor considerado mais próximo do real é:

L m = (1,2314 + 1,231S + 1,2314 + 1,2313) / 4 = 1,2314 m

Exemplo 7: Adotando-se para a aceleração da gravidade, em determinado local, o valor 9,80 m/s2 e obtendo-se experimentalmente, no mesmo local, o valor de 9,90 m/s2, o desvio de que está afetado esta grandeza será:

- Desvio Absoluto = (Valor Obtido - Valor Adotado) = (9,90 - 9,80) = 0,10 m/s2
- Desvio Relativo = (Desvio Absoluto / Valor Adotado) = 0,10 / 9,80 = 0,01
- Desvio Relativo Percentual = (Desvio Relativo.100 %) = 1%

Exemplo 8: Um operador efetuou, com o mesmo instrumento, a medida do comprimento dos segmentos AB e CD mostrados na figura abaixo. Em cada um dos casos é conhecido o valor mais provável de cada medida.

Figura 1 – Segmentos AB e CD medidos com o mesmo instrumento

Segmento AB:

$Valor\ Obtido\ =\ 8{,}00\ cm$

$Valor\ Mais\ Provável\ =\ 8{,}40\ cm$

$Desvio\ Absoluto\ =\ 0{,}40\ cm$

$Desvio\ Relativo\ \%\ =\left(\frac{0{,}40}{8{,}40}\right).100\% = 5\%$

Segmento CD:

$Valor\ Obtido: 19{,}4\ cm$

$Valor\ Mais\ Provável\ =\ 20{,}0\ cm$

$Desvio\ Absoluto\ =\ 0{,}6\ cm$

$Desvio\ Relativo\ \%\ =\ 3\%$

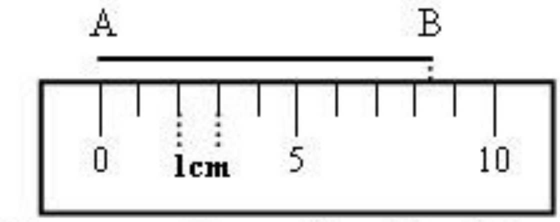
Neste exemplo, observa-se que apesar da medida de CD apresentar um desvio absoluto maior (0,6), seu desvio relativo percentual é menor (3%).

Então, entre essas medidas, qual seria aquela cujo processo de medida foi de melhor qualidade?

I.2. Algarismos Significativos

A necessidade de utilizarem-se instrumentos de medidas leva-nos a conceituar o que chamamos de algarismos significativos. Vejamos alguns exemplos:

a) Utilizando-se de uma régua centimetrada (dividida em centímetros), conforme ilustra a figura, podemos observar que o comprimento AB pode ser avaliado em 8,3 cm.



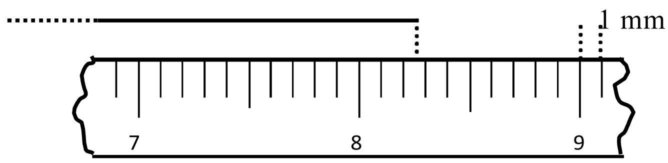
Régua centimetrada: AB = 8,3 cm

Observe que, sendo o comprimento do segmento AB = 8,3 cm, temos os algarismos 8 e 3, onde 8 é exato e 3 é avaliado (observe que um segundo observador poderia considerar 8,2 cm ou 8,4 cm). Por esse motivo denominamos o algarismo 3 de duvidoso.

Assim, uma grandeza medida deve apresentar um algarismo chamado de avaliado ou duvidoso, além dos algarismos exatos. Então, podemos esquematizar o conceito de algarismos significativos, da seguinte forma:

ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS = EXATO(S) + DUVIDOSO (o último)

b) Se utilizarmos uma régua comum, milimetrada, para medir o mesmo segmento, podemos ter uma situação conforme está ilustrado a seguir, numa visão ampliada de uma parte da régua e desse segmento AB. Neste caso podemos avaliar o seu comprimento:



Régua milimetrada:AB = 8,26 cm

Figura 2 - Representação de uma segmento de régua milimetrada

AB = 8,26 cm: aqui, os algarismos exatos são 8 e 2 ao passo que o duvidoso é 6, uma vez que a sua obtenção surgiu de uma apreciação do experimentador.

c) Se utilizássemos um paquímetro, poderíamos obter para a grandeza em foco um valor de 8,271 cm. Neste caso, quais os algarismos duvidosos e quais os exatos? Já um micrômetro nos permitiria obter um valor que poderia ser 8,2713 cm.

Veja agora um resumo da medida de AB com os diferentes instrumentos:

Tabela 1 - dados medidos com diferentes equipamentos, precisões diferentes.

Instrumento	Menor Divisão	Comprimento (cm)	N.º de Algarismos Significativos
Régua em cm	1 cm	8,3	2
Régua comum	0,1 cm	8,26	3
Paquímetro	0,01 cm	8,271	4
Micrômetro	0,001 cm	8,2713	S

O instrumento de menor divisão poderá medir a mesma grandeza com um número maior de algarismos significativos. Evidentemente poderíamos utilizar outros métodos para mensurar esta grandeza e obtermos uma precisão melhor. Mas, estaríamos chegando ao verdadeiro valor da grandeza? Ou apenas nos aproximando de seu valor mais provável? Desta forma, precisamos prestar atenção no seguinte:

- Quando efetuarmos uma medida qualquer, devemos apresentar o valorda grandeza com todos os seus algarismos significativos, inclusive o último que é duvidoso;
- Podemos apresentar uma grandeza de várias formas, desde que não alteremos o número de seus algarismos significativos.

Em relação a esta última observação, veja o exemplo a seguir (ex. 9).

Exemplo 9: Um estudante determinou a massa de um objeto: obteve m = 0,02130 kg. Esta grandeza foi obtida com 4 algarismos significativos (2,1,3 e 0).

Observe que o zero à direita é significativo (surgiu de uma avaliação) ao passo que os da esquerda não. Assim poderíamos escrever também:

$$m = 2{,}130E10^{-2}\ kg = 2{,}130E10\ g = 21{,}30\ g = 21{,}30E10^{-3}\ kg$$

Observe que em todas as formas apresentadas acima a grandeza continuou com quatro algarismos significativos. Qualquer representação da mesma que altere o número de algarismos significativos é incorreta.

Por exemplo, 2,13E10-2 kg estaria errado. Neste caso o algarismo duvidoso agora é o 3, e a grandeza passou a ter 3 algarismos significativos.

Utilizando esta representação, você agora pode compreender que o resultado S m/s não é idêntico a S,00 m/s. Por quê?

Como o valor de uma grandeza não deve apresentar mais do que um algarismo duvidoso, torna-se desnecessário apresentar resultados experimentais com algarismos que não possuam qualquer significado.

I.3. Incertezas

a) Incerteza absoluta

Conforme já vimos, ao medirmos uma grandeza, o seu valor será dado pelos algarismos efetivamente gravados numa escala e quando possível por mais um algarismo avaliado a critério do operador, chamado de duvidoso. Assim, utilizando-se uma régua comum encontramos para um dado comprimento AB, citado no exemplo anterior, o valor de 8,26 cm.

O algarismo seis é o duvidoso; desta forma, dizemos que ele está afetado de uma incerteza.

Como geralmente não conhecemos se o valor da incerteza é para mais ou para menos (ou seja, seu sinal) adota-se um valor $\pm\Delta$ que cobrirá um intervalo igual a 2 $|\Delta|$ em torno do valor medido.

Assim, define-se como incerteza absoluta o valor $\pm\Delta$

$$\boxed{\text{INCERTEZA ABSOLUTA} = \pm\Delta}$$

A amplitude dessa incerteza é fixada pelo operador e depende da sua perícia, da facilidade de leitura, do procedimento, e do próprio aparelho ou instrumento utilizado.

Retornando ao exemplo anterior (medida do comprimento AB), podemos adotar para uma medida feita com uma régua, uma incerteza igual a ± 0,2 mm. Então, o comprimento do segmento AB deverá ser corretamente apresentado da seguinte forma:

$$\boxed{AB = (8{,}26 \pm 0{,}02)\ \text{cm}}$$

b) Incerteza relativa e incerteza relativa percentual

É a razão entre a incerteza absoluta adotada na medição do valor de uma grandeza e o valor desta grandeza. Da mesma forma que o desvio relativo, a incerteza relativa nos dará uma apreciação da qualidade da medida e é freqüentemente representada na forma percentual.

$$\boxed{\text{INCERT. RELATIVA} = \text{INCERT. ABSOL.} / \text{VALOR DA GRANDEZA}}$$

e

$$\boxed{\text{INCERT. RELATIVA PERCENTUAL} = \text{INCERT. RELATIVA} \times 100\%}$$

Com relação à medida do comprimento AB, temos as incertezas relativa e relativa percentual:

Incerteza Relativa = 0,02 cm / 8,26 cm = 0,0024 ou 0,24%

Observação: No caso de uma única medida, falaremos sempre em incerteza e não em desvio ou erro, visto não conhecermos nem o valor real e nem o valor mais aproximado da grandeza

I.4. Propagação de Incertezas - Crítica aoResultado da Medição de uma Grandeza

O valor de uma grandeza poderá ser obtido diretamente (medida de um comprimento, massa, tempo, etc.) ou indiretamente (medida de aceleração, pressão, força, volume, etc.).

Nas medidas indiretas o valor da grandeza final dependerá das incertezas de cada uma das grandezas obtidas direta ou indiretamente, bem como da forma da expressão matemática utilizada para obtê-las.

Por exemplo, no cálculo de uma dada pressão P = F/A a força F e a área A apresentam incertezas que afetarão o valor final de P. Examinaremos então, como se obtém a incerteza do valor da grandeza (P), que se mede indiretamente, em função das incertezas das medidas diretas (F e A).

a) Soma ou Subtração

Efetuaram-se as medidas de n grandezas: A, B, C... etc. e avaliaram-se suas respectivas incertezas:

$$\left.\begin{aligned} A &= a \pm \Delta a \\ B &= b \pm \Delta d \\ C &= c \pm \Delta c \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &a, b, c, \ldots = \textit{valores medidos} \\ &\pm\Delta a, \pm\Delta b, \pm\Delta c, \ldots = \textit{incertezas absolutas} \end{aligned}$$

$$S = A + B + C + \ldots$$

$$S = s \pm \Delta s \quad \left.\right\} \begin{array}{l} s = \textit{valor calculado da soma} \\ \pm\Delta s = \textit{incerteza absoluta da soma} \end{array}$$

$$s \pm \Delta s = a \pm \Delta a + b \pm \Delta b + c \pm \Delta c + \cdots \tag{1}$$

$$s = a + b + c + \cdots \tag{2}$$

Subtraindo (2) de (1):

$$\pm\Delta s = \pm\Delta a \pm \Delta b \pm \Delta c \pm \cdots \tag{3}$$

Adotaremos o critério mais desfavorável, isto é, consideraremos que todas as incertezas possuam o mesmo sinal e, assim, obteremos a seguinte relação para a incerteza absoluta da soma ou subtração:

$$\pm\Delta s = \pm(|\Delta a| + |\Delta b| + |\Delta c| + \cdots) \tag{4}$$

Em resumo:

PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS NA SOMA OU SUBTRAÇÃO:
$$s \pm \boldsymbol{\Delta} s = s \pm (|\Delta a| + |\Delta b| + |\Delta c| + \cdots)$$

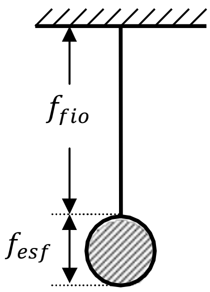
Exemplo 10: Medindo-se com uma régua milimetrada, em duas etapas, o comprimento de um tubo, foram obtidos os seguintes valores, juntamente com as incertezas adotadas pelo operador:

L1 = (1,0000 ± 0,0004) m e L2 = (0,0123 ± 0,0004) m

Assim, o comprimento do tubo, pelo critério mais desfavorável seria:

L = L1 + L2 = (1,0000 + 0,0123) ± (0,0004 + 0,0004) = (1,0123 ± 0,0008) m

Exemplo 11: Para medir o comprimento total de um pêndulo (fio + esfera) usou-se uma régua milimetrada para medir o comprimento do fio e um micrômetro para medir o diâmetro da esfera. Observam-se os valores indicados abaixo, juntamente com as incertezas adotadas pelo operador:



$$\left.\begin{array}{r} f_{fio} = (2{,}1000 \pm 0{,}0005)m \\ f_{esf} = (0{,}021354 \pm 0{,}000002)m \end{array}\right\} \Rightarrow f = f_{fio} + f_{esf}$$

A soma dos comprimentos é f. = 2,1213S4 m e a soma das incertezas absolutas é □ f. = 0,000S02 m. Observe que o algarismo 3 é duvidoso, portanto, se já não existe certeza nesta casa decimal, não tem sentido apresentar os algarismos S e 4 no resultado da soma.

O comprimento do pêndulo será então: L = f. ± □f. = (2,1214 ± 0,000S) m

Observe que, neste caso, torna-se desnecessário utilizar, juntamente com uma régua, um instrumento de precisão como é o caso do micrômetro.

b) Multiplicação, Divisão, Radiciação e Potenciação

Estas operações poderão ser englobadas na forma de um monômio:

$$F = K \cdot A \cdot B^{\alpha} \cdot C^{\beta} \tag{5}$$

Demonstra-se teoricamente que a incerteza relativa $\pm \left({}^{\Delta f}\!/_{f} \right)$ poderá ser colocada em função das incertezas relativas das grandezas que a compõe pela seguinte fórmula (critério mais desfavorável):

$$\pm \frac{\Delta f}{f} = \pm \left(\left| \frac{\Delta k}{k} \right| + \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \alpha \frac{\Delta b}{b} \right| + \left| \beta \frac{\Delta c}{c} \right| \right)$$

logo, a incerteza absoluta será:

$$\pm \Delta f = \pm f \times \left(\left| \frac{\Delta k}{k} \right| + \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \alpha \frac{\Delta b}{b} \right| + \left| \beta \frac{\Delta c}{c} \right| \right) \tag{6}$$

onde:

$$A = a \pm \Delta a$$

$$B = b \pm \Delta b$$

$$C = c \pm \Delta \mathrm{c}$$

$$K = k \pm \Delta k = \text{constante que não depende da medição}$$

então:

$$F = K \cdot A \cdot B^{\alpha} \cdot C^{\beta} = f \pm \Delta f \tag{7}$$

$$f \pm \Delta f = f \pm f \times \left(\left| \frac{\Delta k}{k} \right| + \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \alpha \frac{\Delta b}{b} \right| + \left| \beta \frac{\Delta c}{c} \right| \right) \tag{8}$$

Uma situação simples ajuda a entender a origem da equação (8).

Seja $F = B^2$ onde $B = b \pm \Delta b$, $K = A = C = 1$ e $\alpha = 2$, logo temos:

$$F = B^2 = (b \pm \Delta b)^2$$

$$F = b^2 \pm 2b\Delta b + (\Delta b)^2$$

Se Δb for uma quantidade pequena em comparação com b, podemos desprezar Δb^2 em comparação com $2b\Delta b$, resultando:

$$F = \underbrace{b^2}_{f} \pm \underbrace{2b\Delta b}_{\Delta f}$$

Portanto:

$$\frac{\Delta f}{f} = \pm \frac{2b\Delta b}{b^2} = \pm \frac{2\Delta b}{b}$$

Logo, podemos escrever:

$$\Delta f = \pm f \times \left(\left| 2 \frac{\Delta b}{b} \right| \right)$$

O que explica a presença do fator α no terceiro termo entre parênteses da equação (8) ou o fator β do quarto termo da mesma equação.

- Discussão de K (constante)

A constante K poderá aparecer nas seguintes formas:

a) Número formado por quantidade finita de dígitos (número exato).

Neste caso a incerteza absoluta é nula;

b) Número que matematicamente comporte infinitos dígitos (irracional, dízima).

Neste caso a incerteza absoluta dependerá da quantidade de dígitos adotada. Se utilizarmos uma calculadora que opere com dez dígitos, teremos $\pi = 3{,}141592654$. O último dígito foi arredondado pela máquina; está afetado por uma "*incerteza*" de uma unidade (no máximo $\Delta\pi = 0{,}000000001$).

Exemplo 12:

Para o cálculo do volume de uma esfera, foi dado o raio da mesma: $R = r \pm \Delta r = (232{,}0 \pm 0{,}1)mm$

Neste caso, podemos calcular seu volume utilizando a calculadora citada acima, sem nos preocuparmos com a incerteza que afeta o número π.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Esta expressão pode ser representada por:

$$V = K_1 K_2 R^3 = v \pm \Delta v$$

onde $K_1 =$ constante exata (porque?) e $K_2 =$ constante irracional.

$$\Delta k_1 = 0;$$

$$\Delta k_2 = \pm 0{,}000000001;$$

$$\Delta r = \pm 0{,}1\ mm$$

De acordo com a equação (8):

$$\pm\frac{\Delta f}{f} = \pm\left(\left|\frac{\Delta k_1}{k_1}\right| + \left|\frac{\Delta k_2}{k_2}\right| + \left|3\frac{\Delta r}{r}\right|\right)$$

$$\pm\frac{\Delta f}{f} = \pm\left(0 + \left|\frac{0{,}000000001}{3{,}141592654}\right| + \left|3\frac{0{,}1}{232{,}0}\right|\right)$$

$$\pm\frac{\Delta f}{f} = \pm(0 + |0{,}00000000032| + |0{,}00129|)$$

$$\pm\frac{\Delta f}{f} = \pm 0{,}00129$$

não afetado pela "incerteza" de π. Isto corresponde a dizer que o volume v apresentará incerteza de $0{,}00129v$ correspondente a cerca de $0{,}13\%$ do valor deste volume.

$$v = \frac{4}{3}\pi(232{,}0)^3 = 52.306.127{,}0\ mm^3$$

e:

$$\pm\Delta v = \pm\ 52.306.127{,}0 \times (0{,}00129) = \pm 67.475\ mm^3$$

A incerteza nos mostra que não é necessário escrever o número após o quarto algarismo. A maneira de apresentar este resultado é :

$$V = (5{,}231 \pm 0{,}007).10^7\ mm^3$$

O valor coerente do volume seria então, $v = 5{,}231 \times 10^7\ mm^3$, ou seja, com 4 algarismos significativos.

No caso de efetuarmos uma única medida, ela será considerada como representativa do valor real.

c) Outros Casos: Argumentos de Funções[2]

Nas situações em que os dados forem utilizados como argumento de funções, como $sen(x)$, $cos(x)$, $log(x)$, x^n e $x^{1/n}$, etc., deve-se calcular a incerteza resultante do valor da função no intervalo $x \pm \Delta x$ da seguinte forma:

- Calcule os extremos superior (f_{sup}) e inferior (f_{inf}) da função no intervalo $x \pm \Delta x$, isto é, calcule o valor da função em $x + \Delta x$ e em $x - \Delta x$, chamando a estes resultados de f_{sup}. e f_{inf}.

- Obtenha, então, o valor da função com a respectiva incerteza, $f \pm \Delta f$, aplicando a seguinte expressão:

---

[2] O procedimento de cálculo que recomendamos visa explorar os recursos das calculadoras. O incremento Δf, quando $\boldsymbol{x}$ vai a $\boldsymbol{x + \Delta x}$, é obtido rigorosamente através da **derivada primeira de $\boldsymbol{f(x)}$ multiplicada por $\boldsymbol{\Delta x}$**

$$F = f \pm \Delta f = \left[\frac{1}{2}\left(f_{sup} + f_{inf}\right) \pm \frac{1}{2}\left(f_{sup} - f_{inf}\right)\right]$$

- Após obter $F = f \pm \Delta f$ trate o número obtido da mesma forma que foi feito nas situações anteriores.

Exemplo 13:

a) $F = (25 \pm 5)^{1/20}$

$$f_{sup} = (25 + 5)^{1/20} = 1{,}1853758$$

$$f_{inf} = (25 - 5)^{1/20} = 1{,}1615864$$

$$F = 1{,}1734811 \pm 0{,}0118947$$

$$F = (1{,}17 \pm 0{,}01)$$

b) $F = \cos(30{,}0° \pm 0{,}2°)$

$$f_{sup} = \cos(30{,}0° - 0{,}2°) = \cos 29{,}8° = 0{,}8677655$$

$$f_{inf} = \cos(30{,}0° + 0{,}2°) = \cos 30{,}2° = 0{,}8642748$$

$$F = 0{,}86602 \pm 0{,}00175$$

$$F = (0{,}866 \pm 0{,}002) = (8{,}66 \pm 0{,}02) \times 10^{-1}$$

c) $F = \ln(1{,}0 \pm 0{,}2)$

$$f_{sup} = \ln(1{,}2) = 0{,}1823215$$

$$f_{inf} = \ln(0{,}8) = -0{,}2231435$$

$$F = -0{,}0204110 \pm 0{,}2027325$$

$$F = (0{,}0 \pm 0{,}2)$$

I.5. Erros Acidentais

Como vimos, por mais perfeito que seja o operador ou o processo de medição de uma grandeza, nunca deixaremos de contar com os fatores acidentais que afetam uma ou mais medidas.

Os principais fatores que implicam no aparecimento dos erros acidentais ou ao acaso e são responsáveis pelas incertezas das medidas são:

a) Defeitos não sistemáticos de leitura (imperícia do operador);

b) Variação da capacidade de avaliação, com o número de medidas efetuadas;

c) Variação da capacidade de avaliação ou da perícia, no caso da observação de uma mesma grandeza por vários observadores;

d) Condições próprias dos aparelhos de medidas (certos aparelhos dão erros de paralaxe que variam com o tamanho da grandeza);

e) Reflexos variáveis do operador (por exemplo no caso de apertar um cronômetro);

f) Dificuldades na obtenção de certas medidas (ajuste do zero de uma escala, aplicação de um aparelho a uma peça em diferentes posições);

g) Interesse do operador em obter medidas em situações diferentes para obtençãode um valor mais representativo de uma grandeza (no caso, por exemplo, da medida do diâmetro de uma esfera);

h) Outros fatores não intencionais, tais que não possam ser considerados como falta grave de operação;

I.6. CÁLCULOS SEM PROPAGAÇÃO DAS INCERTEZAS

I.6.1. Algarismos Significativos nos Resultados

Quando se trabalha com uma grandeza sem explicitar a sua incerteza, é preciso ter em mente a noção exposta no texto referente ao conceito de algarismo significativo. Mesmo que não esteja explicitada, você sabe que a incerteza afeta "diretamente" o último dígito de cada número.

Para verificar esta afirmação, sugerimos que se assinale com um traço todos os algarismos cuja ordem seja superior ou igual à ordem de grandeza da incerteza.

Nos exemplos abaixo, considere significativos os algarismos assinalados:

a) $\overline{186,}3 \pm 1{,}7 \rightarrow 186\ ou\ 1{,}86 \times 10^2$
b) $45{,}37 \pm 0{,}13 \rightarrow 45{,}4\ ou\ 4{,}54 \times 10$
c) $\overline{2523}1 \pm 15 \rightarrow 2523\ ou\ 2{,}523 \times 10^4$
d) $6 \pm 0{,}002 \rightarrow \overline{6{,}000} \pm 0{,}002 \rightarrow 6{,}000$

As operações que você efetuar com qualquer grandeza darão como resultado um número que tem uma quantidade "bem definida" de algarismos significativos.

I.6.2. Multiplicação e Divisão

Mantém-se no resultado uma quantidade de algarismos idêntica à da grandeza com menor número de dígitos significativos

Exemplo 14: $2{,}3 \times 3{,}1416 \times 245 = 1{,}8 \times 10^3$

O produto dos três números deu como resultado $1{,}7702916 \times 10^3$ mantivemos, todavia, apenas dois algarismos em virtude da grandeza representada pelo número $2{,}3$ ter apenas dois algarismos significativos.

O número 1,7702916 foi arredondado para 1,8 porque seu terceiro dígito (7) é maior do que 5.

I.6.3. Adição e Subtração

- Exprime-se a soma e/ou subtração dos números, fatorando-se amaior potência de dez;
- Verifica-se, então, qual desses números tem o algarismo duvidoso de maior ordem;
- O algarismo duvidoso do resultado estará nessa mesma ordem

Exemplo 15:

a) $2{,}247 \times 10^3 + 3{,}25 \times 10^2 = (2{,}247 + 0{,}325) \times 10^3 \rightarrow 2{,}572 \times 10^3$

Neste exemplo, os algarismos duvidosos em cada uma das parcelas pertencem à mesma ordem, à dos milésimos.

b) $3{,}18 \times 10^4 + 2{,}14 \times 10^2 = (3{,}18 + 0{,}0214) \times 10^4 = 3{,}2014 \times 10^4 \rightarrow 3{,}20 \times 10^4$

Observe que os algarismos duvidosos em 3,18 e 0,0214 pertencem a ordens distintas: respectivamente centésimos e décimos de milésimos. Neste caso, o resultado da soma será significativo até a ordem dos centésimos apenas.

$$2550{,}0 + 0{,}75 = 2550{,}75 \rightarrow 2550{,}8$$

Aqui o número 0,75 foi arredondado para 0,8. Observe que os algarismos duvidosos em $2550{,}0$ e $0{,}75$ também pertencem a ordens distintas, décimos e centésimos, respectivamente. O resultado da soma será significativo até a ordem dos décimos.

I.6.4. Regra para os arredondamentos

Como regra geral adiciona-se uma unidade ao último algarismo significativo, se o dígito seguinte a ele for maior ou igual a 5. Mantém-se o último algarismo significativo inalterado se o dígito seguinte a ele for menor do que 5.

Atenção

- Após identificar os algarismos significativos, assinale-os e efetue os cálculos com um ou mais algarismos além dos necessários. Porém, não perca de vista o número de algarismos significativos resultantes de cada operação intermediária, assinalando-os também.

- Na apresentação dos resultados devem permanecer apenas os algarismos significativos, isto é, os assinalados com um traço. Observe ainda que, dentre os algarismos assinalados como significativos, a incerteza afeta "diretamente" o de menor ordem.

- Note, por exemplo, que se a incerteza for maior do que 5 unidades nesta menor ordem, necessariamente o algarismo de ordem precedente a esta será também afetado. Em vista disto, ao comparar dois valores resultantes de cálculos, os quais você espera que sejam iguais, os algarismos de ordem precedente à última podem eventualmente diferir de uma unidade.