UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Buracos Negros Newtonianos e Relativísticos

Pedro Otavio Souza Baqui

Monografia de Conclusão de Curso

Vitória-ES
2014

Pedro Otavio Souza Baqui

Buracos Negros Newtonianos e Relativísticos

Monografia apresentada ao Departamento de Física/CCE, Universidade Federal do Espírito Santo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Vitorino de Borba Gonçalves

Vitória-ES
2014

Pedro Otavio Souza Baqui

Buracos Negros Newtonianos e Relativísticos

Monografia apresentada ao Departamento de Física/CCE, Universidade Federal do Espírito Santo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Física

Vitória, 28 de fevereiro de 2014

BANCA EXAMINADORA

_____
Prof. Dr. Sérgio Vitorino de Borba Gonçalves – Orientador

_____
Prof. Dr. Clisthenis Ponce Constantinidis

_____
Prof. Dr. Flávio Gimenes Alvarenga

Vitória-ES
2014

Aos meus pais e a minha irmã querida

Agradecimentos

Agradeço a minha família por todo apoio, compreensão e amor, aos meus grandes amigos pelos momentos felizes e aos meus mentores por seus ensinamentos. Ao professor Sérgio Vitorino pela oportunidade concedida a mim de trabalharmos juntos. Agradeço também a todos que contribuíram de uma forma direta ou indireta para a conclusão desse trabalho.

Disciplina é liberdade.

Legião Urbana

RESUMO

Em 1783 John Mitchell em uma carta enviada a Henry Cavendish da Royal Society, escreveu a respeito de corpos celestes tão densos que possuiriam uma velocidade de escape maior do que a velocidade da luz, sendo assim toda luz emitida por tal corpo nele ficaria aprisionado e por consequência não poderia ser visto. A previsão destes corpos baseou-se nas leis de Newton, na teoria corpuscular da luz e ficaram conhecidos como estrelas escuras ou buracos negros newtonianos. A partir do século XIX a teoria corpuscular da luz foi aos poucos sendo questionada, assim como qualquer outro produto dela advinda, devido às experiências de Young e Fresnel a respeito do caráter ondulatório da luz. Entretanto, a partir de meados do século XX, com a publicação da teoria da relatividade geral e com avanços significativos em mecânica quântica foi possível a previsão de corpos que poderiam aprisionar luz, agora distorcendo o espaço-tempo, formando assim os chamados buracos negros relativísticos. Em nosso trabalho estudaremos esses buracos negros clássicos e relativísticos analisando seu comportamento do ponto de vista teórico a partir da teoria desenvolvida por Newton e das equações de Einstein. A compreensão do comportamento de tais objetos é de grande importância para se entender, entre outras coisas, os modelos de evolução estelar, os modelos cosmológicos de evolução do nosso Universo e a existência das ondas gravitacionais.

Palavras-chave: Colapso Gravitacional, Buracos Negros, Estrelas Escuras.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

K – Energia cinética de uma partícula

m – Massa de uma partícula

v – Velocidade de uma partícula

G – Constante de gravitação universal

h – Altura de queda de um corpo

$M_{\odot}$ – Massa do Sol

c – Velocidade da luz

T – Período de órbita dos corpos estudados

a – Semi eixo maior das elipses descritas pelos corpos celestes com período T

r – Distância entre dois corpos

$\Phi(r)$ – Energia potencial gravitacional de uma partícula

g – Aceleração da gravidade da Terra

t – Tempo

$S[y]$ – Funcional ação

L– Lagrangiana de um sistema

R– Escalar de Ricci

g_{ab} – Coeficientes da métrica

G_{ab}– Tensor de Einstein

T_{ab}– Tensor momento-energia

R_{ab}– Tensor de Ricci

u– Parâmetro afim

$\dot{x}^a$ – Coordenadas generalizadas

Γ^c_{ab} – Símbolo de Christoffel

Introdução

De acordo com a teoria da evolução estelar, as estrelas possuem origem nas nebulosas, nuvens densas no espaço sideral compostas essencialmente de hidrogênio e que podem ter dimensões de anos luz. Em forma gasosa esses elementos se atraem formando uma estrutura gigantesca chamada protoestrela que após atingir certa temperatura, em seu centro, devido à compressão desse gás, inicia o processo de fusão transformando hidrogênio em hélio e hélio em elementos mais pesados, até a formação de ferro, sempre liberando energia que nos chega através de ondas eletromagnéticas.

Não pertencendo a um sistema binário ou múltiplo, a evolução de uma estrela depende apenas de sua massa inicial.

Se a condensação de hidrogênio se inicia com uma massa menor do que $0,8\ M_\odot$, então seu núcleo não alcançará uma temperatura suficiente para desencadear o processo de fusão. Estas são conhecidas como anãs marrons.

Se a estrela se forma com uma massa entre $0,8$ e $10M_\odot$, seu centro consegue atingir tal temperatura desencadeando o processo de fusão do hidrogênio. Após a queima do hidrogênio, a estrela expandirá passando pela fase gigante vermelha, super gigante vermelha e ejetará uma nebulosa planetária terminando sua vida como uma anã branca.

Se a estrela inicia com uma massa maior que $10M_\odot$ em algum momento de sua evolução começará a produzir ferro. A partir desse momento o processo deixa de liberar energia para consumir, desequilibrando o estado estável do corpo dando origem a uma a uma explosão que eliminará grande parte da matéria da estrela original. Essa explosão é chamada supernova.

A matéria remanescente da supernova dará origem a uma estrela de nêutrons se a massa inicial da estrela está entre 10 e $25M_\odot$. Se sua massa inicial é maior do que $25M_\odot$ então a matéria remanescente se contrairá até um ponto dando origem a um buraco negro, um corpo celeste capaz de aprisionar a própria luz em seu interior. O buraco negro mais próximo da Terra está aproximadamente há 1600 anos-luz [1].

A Figura 1 ilustra a evolução estelar discutida acima.

Objetos de muita curiosidade, os buracos negros são de grande importância,

entre outras coisas, para um melhor entendimento das ondas gravitacionais. Sua colisão com outro buraco negro gera um sistema que temporariamente se torna fonte significativa das ondas gravitacionais. Como tal, os buracos negros devem revelar muito sobre a gravidade. A sua existência reforça a confiança nos modelos atuais de evolução estelar e cósmica, desde o Big Bang até o presente universo, além de possuírem alta relevância para um possível entendimento das singularidades no universo.

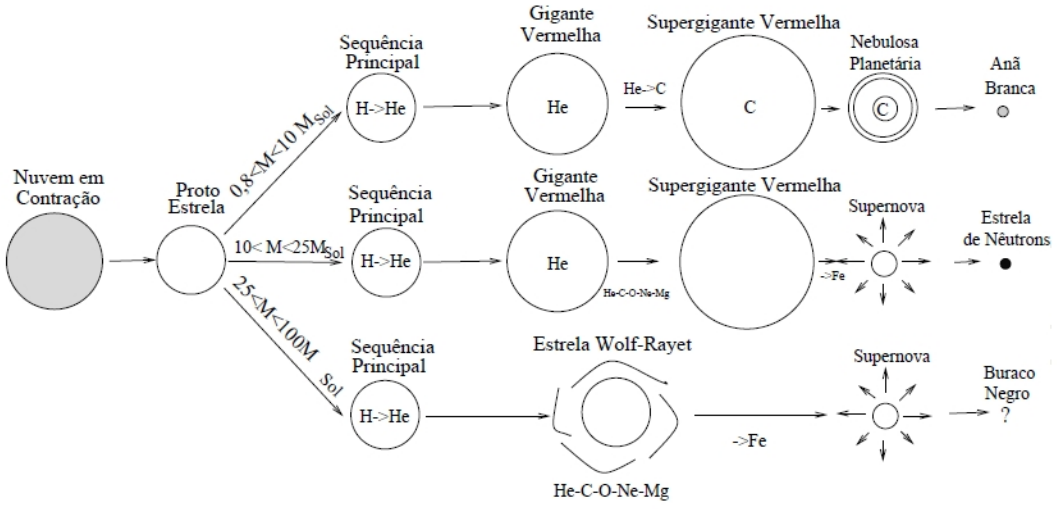

Figura 1: evolução de uma estrela segundo sua massa [2].

Os buracos negros são conhecidos pela propriedade de atraírem para seu interior tudo que está em seu caminho como, por exemplo, estrelas e satélites naturais, e também por não deixarem escapar nada de seu interior nem mesmo a própria luz.

Podemos lançar um olhar newtoniano em cima do fenômeno de aprisionamento da luz por corpos hipotéticos de densidade suficientemente grande. Isto nos levará a algumas propriedades interessantes desses corpos, chamados buracos negros newtonianos.

Por outro lado, e de forma mais correta, podemos obter uma versão relativística deste fenômeno de aprisionamento da luz. Encontraremos, entretanto muito mais propriedades para tais corpos. Estes são chamados buracos negros relativísticos. Caracterizados por massa, carga e rotação, qualquer informação além dessas são perdidas ao adentrar o horizonte de eventos, região que delimita buraco negro.

Ficaremos restritos aos estudos dos chamados buracos negros relativísticos de Schwarzschild, corpos que possuem apenas massa, com rotação e carga nulas.

Também ficaremos restritos nessa monografia ao estudo dos fenômenos de caráter geométrico dos buracos negros. Fenômenos de caráter astrofísico como a evolução estrelar que dará origem tal estrutura, pode ser encontrado de uma forma resumida em [2].

Começaremos este trabalho desenvolvendo uma teoria newtoniana para o fenômeno de aprisionamento da luz, já sugerido por Mitchell/Laplace desde o século XVIII, utilizando conceitos de física básica. Introduziremos o espaço-tempo de Minkowski e veremos a influência da massa sobre o mesmo. Em seguida, desenvolveremos uma teoria relativística para o fenômeno de aprisionamento da luz. Por último mostraremos como os buracos negros são detectados.

O trabalho que se segue foi estruturado de forma que um aluno de graduação possa desenvolver seus conhecimentos a respeito do assunto aqui abordado de maneira fácil e agradável.

Capítulo 1

1. BURACOS NEGROS NEWTONIANOS

Embora seja a relatividade geral atualmente a melhor teoria que descreve os buracos negros, podemos através da mecânica newtoniana entender seus conceitos básicos. Vamos desenvolver esse estudo neste capítulo.

1.1 Velocidade de escape

Quando lançamos uma pedra para o alto com uma velocidade *v*, observamos que após certo tempo, a pedra atinge uma altura *h* e começa a cair. Se lançarmos agora esta pedra com uma velocidade maior, veremos que ela alcançará uma altura ainda maior do que *h*. Conforme fazemos este processo para velocidades maiores chegamos a um ponto em que lançaremos a pedra e esta não voltará mais. Esta velocidade crítica é chamada velocidade de escape. De uma forma simples, temos que:

Velocidade de escape: velocidade mínima inicial necessária para que um corpo de massa *m* deixe a superfície de uma estrela, ou outro corpo celeste, de forma definitiva.

Podemos calculá-la de forma simples utilizando conceitos de física básica. Para isso, imagine que estamos na superfície, por exemplo, de uma estrela (Figura 2) e definimos a energia potencial gravitacional $\Phi_o = 0$ nesta superfície. Utilizando a lei de conservação de energia, temos que:

Energia inicial = Energia final

$$K_o + \Phi_o = K + \Phi \quad . \qquad (1.1)$$

Onde K_o e K são as energias cinéticas inicial e final da pedra lançada respectivamente,

assim como Φ_o e Φ são as energias potenciais gravitacionais inicial e final da mesma pedra, respectivamente.

Obs.: para este cálculo desprezamos a resistência do ar.

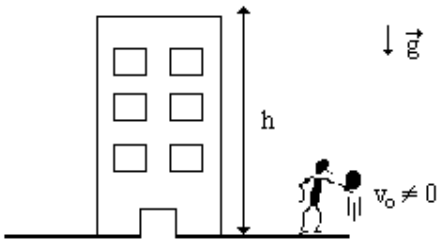

Figura 2: lançamento vertical para cima [3].

No limite em que a altura da pedra lançada tende ao infinito, $h \rightarrow \infty$, a energia cinética final da pedra tende a zero, $K \rightarrow 0$, desta forma teremos que,

$$K_o = \Phi \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{2} m v_o^2 = \frac{GMm}{R} \qquad , \qquad (1.2)$$

onde m é a massa da pedra lançada, v_o é a velocidade inicial da pedra, R é o raio do corpo celeste, M é massa do corpo celeste e G a constante de gravitação universal.

Portanto a velocidade de escape de uma estrela ou de outro corpo celeste é calculada como:

$$v_o = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad . \qquad (1.3)$$

Notemos que para o cálculo da velocidade de escape, basta que saibamos a massa e o raio do corpo celeste estudado. Segue abaixo uma tabela com velocidades de escape de alguns corpos celestes.

Planetas	Velocidade de Escape (Km/s)
Mercúrio	4,4
Vênus	10,4
Terra	11,2
Lua	2,4
Marte	5,0
Júpiter	59,5
Saturno	35,5
Urano	21,3
Netuno	23,5
Sol	618

Tabela 1: velocidades de escape de alguns corpos celestes.

1.2 Raio Crítico de um Buraco Negro Newtoniano

Suponha agora que ao invés de lançarmos uma pedra, lançarmos uma partícula de luz com massa *m'*, baseando-se na teoria corpuscular da luz de Newton.

Podemos imaginar a existência de um corpo suficientemente denso tal que sua velocidade de escape seja maior do que a velocidade da luz. Toda luz emitida por esta estrela seria atraída para seu interior, formando assim um buraco negro newtoniano, objetos impossíveis de serem observados diretamente. O primeiro a sugerir a existência de tais estrelas foi o astrônomo amador John Mitchell em uma carta escrita a Cavendish, que era membro da Royal Society em 1784 [4][5].

Podemos dar um passo além no trabalho de Mitchell considerando que a partícula de luz possui inicialmente uma velocidade *c*. Substituindo essa grandeza, *c*, na equação (1.2) encontraremos um raio crítico, o qual nem a luz conseguirá ir além, que nos permite classificar tal estrela como um buraco negro newtoniano.

$$R_{\text{raio crítico}} = \frac{2GM}{c^2} \quad . \qquad (1.4)$$

A velocidade da luz no tempo de Mitchell ainda não era conhecida, mas sabia-se que possuía um limite segundo experiências de Ole Romer através de observações do período de uma lua de Júpiter. [6]. Apesar da busca por essa velocidade datar desde o século XVII com Galileu, ela só foi medida com certa precisão por Fizeau no século XIX.

Vamos utilizar aqui unidades naturais $G = 1$ e $c = 1$. Desta forma temos o raio crítico escrito de forma mais simples

$$R_{\text{raio crítico}} = 2M \quad . \qquad (1.5)$$

Se o raio da estrela R é menor do que seu raio crítico $R_{raio\ crítico}$, ($R < R_{raio\ crítico}$) então a estrela será classificada como buraco negro newtoniano (Figura 3).

Podemos dar um segundo passo no trabalho de Mitchell considerando que nada pode ultrapassar a velocidade da luz c, logo nenhuma partícula conseguirá atravessar a região de superfície com $R=R_{raio\ crítico}$, de dentro para fora. As partículas que o atravessam, de fora para dentro, ficam também retidas em seu interior.

Raio Crítico de um Buraco Negro Newtoniano: quantidade intrínseca a todo corpo material associado a sua extensão.

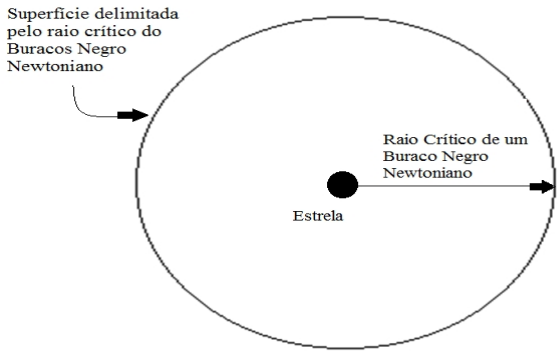

Figura 3: concepção artística de uma estrela escura junto a seu horizonte de eventos.

Por exemplo, para que o Sol se transforme em um Buraco Negro Newtoniano deve

contrair-se até um raio $R < R_{raio\ crítico} = 2{,}9\ Km$

$$R_{\text{raio crítico}} = \frac{2(6{,}67 \times 10^{-11} N \cdot m^2 / Kg^2)(1{,}99 \times 10^{30} Kg)}{(3{,}0 \times 10^8 m/s)^2} \approx 2{,}9 Km\ .$$

Ressaltando que segundo modelos de evolução estelar nosso sol se expandirá passando pelos estados de gigante vermelha, super gigante vermelha, expelindo grande parte se sua matéria em uma nebulosa planetária e por fim tornando-se uma anã branca. Ou seja, não se tornará um buraco negro.

Devemos também deixar claro que o resultado do cálculo do raio crítico de um buraco negro newtoniano encontrado em mecânica newtoniana é acidentalmente idêntico ao Raio de Schwarzschild, resultado encontrado em relatividade geral.

Em verdade utilizamos relatividade geral para o cálculo desta grandeza uma vez que a gravitação de Newton é somente válida no regime de campos gravitacionais fracos. Nas vizinhanças de um buraco negro, como sabemos, o campo gravitacional é muito intenso devido à quantidade de matéria que existe em seu interior.

Capítulo 2

2. O ESPAÇO-TEMPO DE MINKOWSKI

Até o início do século XX, os físicos entendiam o espaço como sendo absoluto, um palco onde todos os fenômenos ocorriam independentemente do tempo.

Para localizar uma partícula em determinada região assumíamos que vivíamos num espaço vetorial tridimensional euclidiano, R^3, sendo necessário uma trinca ordenada de números (x,y,z) mais um relógio. O elemento de linha ds, que em particular neste espaço é a menor distância entre dois pontos A e B, era calculada pelo teorema de Pitágoras na forma infinitesimal:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad , \qquad (2.1)$$

Elemento de linha em R^3.

A noção de um mundo descrito de forma exata pela geometria euclideana vem de muito tempo, mais precisamente da Grécia antiga com a publicação do livro *Os Elementos*, de Euclides. Esse grande matemático grego lançou as bases da geometria conhecida como euclidiana, utilizada ainda hoje para descrever uma gama de fenômenos naturais [7].

A suspeita de que essa geometria de Euclides não representava a natureza de forma totalmente exata veio após dois mil e trezentos anos com a interpretação de Minkowski sobre a relatividade restrita. Einstein, criador da teoria da relatividade restrita, mostrou que para referenciais com velocidades próxima a da luz o elemento de linha de R^3 era alterado, de forma que observadores em referenciais diferentes mediam comprimentos diferentes.

O trabalho de Einstein de impactos profundos influenciou vários ramos do conhecimento como a filosofia e as artes, culminando na comunidade dos físicos numa mudança de paradigma.

Os conceitos de simultaneidade e de tempo deixaram de ser absolutos. A luz nesta teoria possui uma velocidade $c = 299\,792\,458\ m/s$ em todos os referenciais, nada podendo superá-la[1].

Através de contração do espaço e dilatação do tempo uma nova física nasceu e toda teoria clássica foi substituída, no limite das altas velocidades, por uma teoria relativista.

Mais tarde Minkowski, ex-professor de Einstein em Zurique, ao ter contacto com sua teoria conseguiu dar-lhe um caráter matemático mais formal, introduzindo a ideia de espaço-tempo fundida numa só entidade. No início Einstein não deu muita atenção ao trabalho de seu professor, tomando-a como um floreio matemático que obscurecia sem necessidade as ideias de sua teoria [8].

Apenas com a construção da teoria da relatividade geral é que Einstein foi perceber a importância do feito de Minkowski.

O elemento de linha nesse espaço-tempo em coordenadas cartesianas é dado por:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad . \qquad (2.2)$$

Elemento de linha no espaço de Minkowski.

A construção do espaço de Minkowski, M^4, pode ser vista de uma forma simples na referência [9]. É bom deixar claro aqui que intervalo entre dois eventos, ds^2, é o mesmo para todos os referenciais em M^4, diferentemente do elemento de linha em R^3.

M^4 é um espaço abstrato com quatro dimensões, sendo difícil sua representação ou imaginação. Apesar disso se fizermos a restrição $z = constante$ conseguimos observar um cone traçado por $ds^2 = 0$ (Figura 4), percorrido pela luz, dividindo este espaço em três regiões, passado, presente e futuro.

A métrica se reduz em particular à:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 \quad . \qquad (2.3)$$

[1]O conceito de que a velocidade da luz é a mesma para todos os referenciais pode ser motivado pelos resultados da experiência de Michelson e Morley cujo objetivo era detectar o movimento relativo da Terra através do éter estacionário [8].

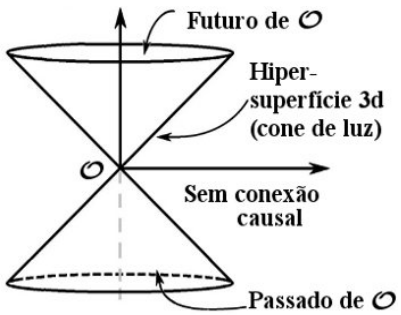

Figura 4: cone de luz no espaço de Minkowski [10].

O futuro e o passado podem ser subdivididos em regiões causais e não causais.

Causal, $ds^2>0$: o sinal entre dois eventos nessa região possui uma velocidade menor do que a da luz.

Não Causal $ds^2<0$: o sinal entre dois eventos nessa região possui uma velocidade maior do que a da luz.

Da mesma forma que descrevemos a natureza com a relatividade de Einstein, também conseguimos descrevê-la com o formalismo de Minkowski. Entretanto, nesse último formalismo é necessário redefinir todas as grandezas físicas em um espaço-tempo 4-dimensional. Para isso, utiliza-se uma ferramenta poderosa chamada cálculo tensorial.

Embora seja a métrica de Minkowski muito usada em alguns ramos da ciência exata como a física de partículas, essa nem sempre é válida. Para regiões que possuem campo gravitacional intenso essa métrica é alterada. Isso se deve ao fato de que o tempo se comporta de maneira diferente em tais regiões e também ao fato de que o espaço que é contraído ou dilatado em sua presença.

Veremos isso a seguir por meio de exemplos.

2.1 A Matéria Encurva o Espaço-Tempo

Imagine um foguete em queda livre com um astronauta em seu interior. Considere também que exista uma pessoa parada observando esse foguete cair na Terra,

denominado de referencial S (Figura 5). No referencial do astronauta S_o , a métrica é escrita como:

$$ds^2 = -c^2 dt_0^2 + dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2 \qquad , \qquad (2.4)$$

onde dt_o é a diferencial do tempo no referencial do astronauta e dx_o, dy_o, dz_o as diferenciais do sistema de coordenadas também relativo ao referencial do astronauta.

Segundo Einstein o próprio astronauta não pode distinguir se está numa região livre de campo gravitacional ou se está em queda livre. Essa ideia é um dos princípios fundamentais da relatividade geral conhecido como princípio da equivalência.

Para escrever a métrica no referencial do observador S, devemos fazer uma transformação de Lorentz entre S e S_o que na forma infinitesimal, com o movimento acontecendo em (x,t) são escritas como:

$$\begin{aligned} dt_o &= \sqrt{1-\beta^2}\,dt \\ dx_o &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,dx \\ dy_o &= dy \\ dz_o &= dz \end{aligned} \qquad \text{Com} \quad \beta = \frac{v}{c} \qquad . \qquad (2.5)$$

Transformações de Lorentz na forma infinitesimal.

.

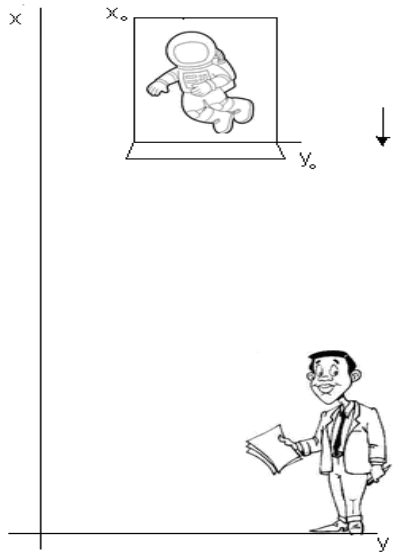

Figura 5: astronauta em queda livre caindo em relação a um observador na Terra parado.

Substituindo (2.5) em (2.4), obteremos:

$$ds^2 = -(1-\beta^2)c^2dt^2 + \frac{dx^2}{(1-\beta^2)} + dy^2 + dz^2 \qquad . \qquad (2.6)$$

Fazendo uma mudança de coordenadas de cartesianas para esféricas teremos, de (2.6), a relação abaixo:

$$ds^2 = -(1-\beta^2)c^2dt^2 + \frac{dr^2}{1-\beta^2} + [r^2(d\theta^2 + sen^2\theta)d\varphi^2]\,. \qquad (2.7)$$

Com objetivo de escrevermos o fator $1\text{-}\beta^2$ em função do potencial gravitacional,

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} \qquad , \qquad (2.8)$$

onde M é a massa do corpo celeste estudado em que se situa o observador, G a constante de gravitação universal e r a distância do centro da estrela, consideraremos a equação de conservação de energia de uma partícula no sistema de referencial do observador S.

$$(m - m_0)c^2 + m\Phi(r) = E_{const} \qquad , \qquad (2.9)$$

onde m_o é a massa de repouso da partícula e $m = m_o \big/ \sqrt{1-\beta^2}$. À esquerda temos a soma da energia cinética mais potencial.

À direita, tomaremos a energia como zero, pois à medida que $r \to \infty$ temos que $m \to m_o$, assim como $\Phi(r) \to 0$. Então (2.9) será escrito como:

$$(m - m_0)c^2 + m\Phi(r) = 0 \qquad . \qquad (2.10)$$

Dividindo a equação acima, por mc^2 e utilizando a relação entre m e m_o obteremos:

$$1-\beta^2=[1+\frac{\Phi(r)}{c^2}]^2 \quad . \qquad (2.11)$$

Para o caso em que $\Phi(r)/c^2 \ll 1$ podemos fazer uma aproximação:

$$1-\beta^2 \approx 1+\frac{2\Phi(r)}{c^2} \quad . \qquad (2.12)$$

Substituindo (2.12) em (2.7) e considerando $G=1$ assim como $c=1$ (unidades naturais) encontramos a menor distância entre dois pontos nas proximidades de uma estrela

$$ds^2=-(1-\frac{2M}{r})dt^2+\frac{1}{(1-\frac{2M}{r})}dr^2+r^2[d\theta^2+(sen^2\theta)d\varphi^2] \ . \qquad (2.13)$$

Métrica nas proximidades de uma estrela em unidades naturais.

E a métrica de Minkowski é alterada na presença de um campo gravitacional. Notemos que no limite em que $r \rightarrow \infty$ recuperamos a métrica de Minkowski.

Einstein em seu trabalho propôs que a gravidade é a grande responsável pela curvatura do espaço tempo, em outras palavras, responsável pela deformação do espaço-tempo de Minkowski.

Se tomarmos t = *constante* e $\theta = \pi/2$ a métrica se reduz à:

$$ds^2=\frac{1}{(1-\frac{2M}{r})}dr^2+r^2d\varphi^2 \quad . \qquad (2.14)$$

O espaço bidimensional geometricamente curvo pode então ser mais bem compreendido se for imerso a um espaço euclidiano plano tridimensional, como podemos observar na figura 6.

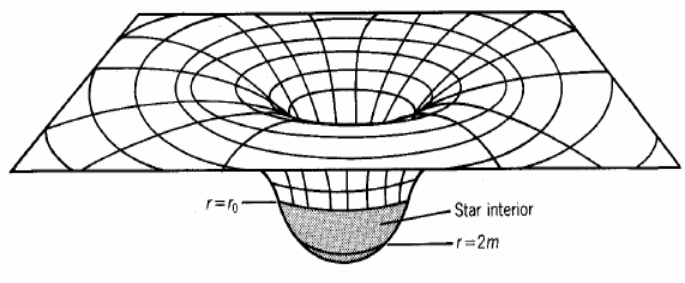

Figura 6: geometria exterior e interior de uma estrela esférica para o caso *t=constante* e $\theta=\pi/2$ imersa em R^3 [11].

Embora seja difícil enxergar um espaço 4-dimensional curvo, é possível observar um espaço 2-dimensional curvo contido em R^3. Podemos ter como exemplo uma esfera (Figura 7).

$$ds^2 = R^2[d\theta^2 + (\sin^2\theta)d\varphi^2] \qquad (2.15)$$

Métrica de uma esfera.

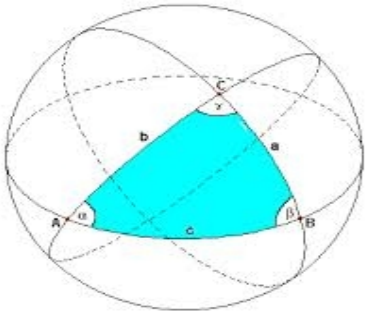

Figura 7: esfera em R^3 [12].

O conceito de curvatura de um espaço foi desenvolvido durante o século XIX por vários matemáticos a partir da rejeição do quinto postulado de Euclides.

5° axioma de Euclides: por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada[2].

[2] Formulação moderna do quinto postulado de Euclides segundo o matemático John Playfair [13].

A rejeição do quinto postulado foi estudada por Gauss, Lobachevisk e por Bolay e levou a descoberta de novas geometrias denominadas geometrias não euclidianas, tão aceitáveis como a geometria de Euclides [13].

Uma consequência notável da rejeição do quinto postulado é que a soma dos ângulos internos de um triângulo, nessas geometrias, é diferente de 180°, conforme podemos observar na figura 7

$$\alpha + \beta + \gamma \neq 180° \quad . \qquad (2.16)$$

A geometria utilizada em relatividade geral é a chamada geometria pseudo-riemanniana. O elemento de linha ds^2, neste espaço assim como no espaço de Minkowski pode possuir os valores positivos, nulos ou negativos.

2.2 A Dilatação Temporal Gravitacional

Seja dt o intervalo de tempo entre dois eventos numa região livre de fontes e dt' o intervalo de tempo entre os mesmos dois eventos a uma distância r do centro da Terra. A relação entre esses dois intervalos de tempo é calculada como:

$$dt' = (1 + \Phi(r))dt \quad , \qquad (2.17)$$

onde $\Phi(r)$ é o potencial gravitacional a uma distância r do centro da Terra.

Imaginemos por outro lado, dois relógios em diferentes regiões, nas proximidades da Terra, a uma distância r_a e outro a uma distância r_b do centro da Terra. Então a razão entre esses intervalos de tempo possui a forma:

$$\frac{dt_a}{dt_b} = \frac{1 + \Phi(r_a)/c^2}{1 + \Phi(r_b)/c^2} = 1 + gh/c^2 \quad , \qquad (2.18)$$

onde g é o módulo da aceleração da gravidade, c a velocidade da luz e h a diferença entre os raios r_a e r_b.

Portanto o tempo passa de forma diferente para alturas diferentes! O resultado acima foi comprovado com boa precisão utilizando relógios de césio e viagens de jatos comerciais por Halefe e Keating [7].

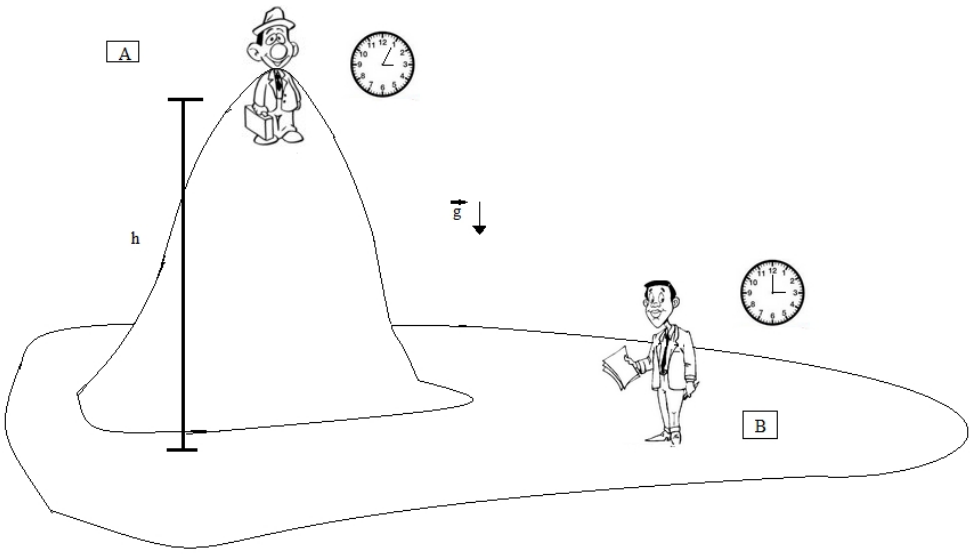

Figura 8: O tempo se comporta de maneira diferente para diferentes alturas.

2.3 Limite dos Campos Gravitacionais Fracos

Após observarmos que a métrica é alterada na presença de massa concluímos que toda teoria da gravitação de Newton deve ser substituída por uma teoria da gravitação que inclua os efeitos de dilatação temporal gravitacional, a curvatura do espaço-tempo gerado pela presença de massa, além dos efeitos relativísticos gerados pelas altas velocidades das partículas estudadas. Essa teoria foi construída por Einstein, chamada de relatividade geral e publicada em 1915 [7].

A métrica (2.13) pode ser obtida através dessa teoria de uma forma totalmente diferente da forma utilizada no tópico 2.1. Para encontrá-la resolvemos as chamadas equações de campo de Einstein, em particular com simetria esférica, vide apêndice D.

$$G_{ab} = kT_{ab} \tag{2.19}$$

Equação de campo de Einstein.

Onde G_{ab} e T_{ab} são os tensores de Einstein e Momento Energia, respectivamente, e k uma constante. As equações de Einstein de uma forma grosseira são equações que descrevem como a matéria "gera" gravidade.

Nesta monografia preferimos chegar à métrica (2.13) por meio de transformações de Lorentz à resolver as equações de Einstein com simetria radial, por questões de simplicidade.

A teoria da gravitação de Newton apesar de falha em determinadas situações, ainda explica muitos fenômenos. É natural, portanto nos perguntarmos quando é possível substituir a Relatividade Geral pela Teoria da Gravitação de Newton a fim de obtermos bons resultados resolvendo apenas simples cálculos?

Podemos responder isso procurando uma relação na qual a métrica de Schwarzschild se reduza a métrica de Minkowski. Assim, efeitos de dilatação temporal e deformação do espaço gerada por um campo gravitacional poderão ser desprezados.

Para essa condição devemos ter campos gravitacionais fracos, ou seja, M pequeno.

$$(1-\frac{2M}{r}) \approx 1 \qquad (2.20)$$

Se exigirmos também que as partículas teste que passam pelas proximidades destes corpos celestes de massa M e simetria esférica possuam baixas velocidades, então recuperamos a teoria newtoniana da gravitação. Se em particular $M = 0$ cairemos na teoria newtoniana na ausência de campos.

Podemos também tomar um caminho diferente, exigindo que o campo gravitacional seja nulo, $M = 0$. Recuperamos então a relatividade restrita. Se também exigimos que as partículas em estudo possuam velocidades baixas, recuperamos como era de se esperar a teoria newtoniana na ausência de campos.

Essa sequência lógica de impormos certas restrições a uma teoria e chegar à outra teoria é chamado princípio da correspondência, princípio muito utilizado em física, vide figura 8.

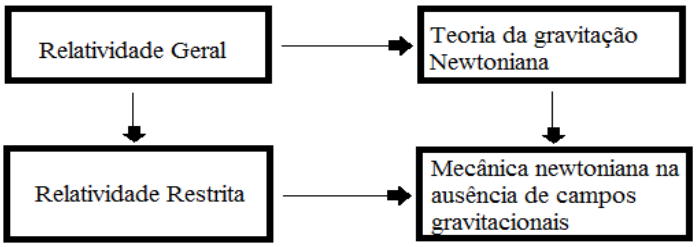

Figura 9: princípio da correspondência.

Capítulo 3

3. BURACOS NEGROS RELATIVÍSTICOS

A abordagem newtoniana dos buracos negros é bastante limitada uma vez que nos diz respeito apenas ao seu raio crítico. Além de se basear na teoria corpuscular da luz que caiu em desuso, utiliza-se da lei da gravitação universal de Newton, válida apenas no regime de campo gravitacional fraco. Também não nos fala a respeito de outros tipos de buracos negros existentes como os com rotação ou com carga.

Nas proximidades de um buraco negro o campo gravitacional é muito intenso, de forma que devemos utilizar uma teoria mais abrangente. Essa teoria que lida com campos fortes foi apresentada por Einstein em 1915 e chamada relatividade geral. Portanto para uma melhor descrição dos fenômenos que ocorrem nas proximidades dos buracos negros utilizaremos aqui a teoria de Einstein[3]

Trataremos neste capítulo basicamente dos chamados buracos negros de Schwarzschild, objetos hipotéticos que surgem de um colapso gravitacional com simetria esférica da massa remanescente de uma supernova.

3.1 Formação de Um Buraco Negro

As estrelas que possuem uma massa inicial maior do que $25M_{\odot}$ produzirão ferro em alguma na fase de sua vida. Quando isso ocorre o processo de liberação de energia cessa dando origem a um processo consumidor de energia. Essa mudança no processo energético gera um desequilíbrio que levará a estrela ejetar grande parte de sua massa em forma de supernova [2].

[3] O conceito atual de buracos negro só foi formulado após a relatividade geral. Historicamente os buracos negros newtonianos nada influenciaram na descoberta ou em sua defesa no meio científico. A ideia de substituirmos uma teoria newtoniana por uma relativística foi apenas para melhor compreensão do leitor.

A matéria remanescente da explosão, estática e eletricamente nula, entrará em colapso contraindo-se totalmente a um ponto, dando origem a uma singularidade munida com um horizonte de eventos, conhecido por buraco negro de Schwarzschild.

Existem, entretanto casos em que a matéria remanescente a uma supernova possui rotação ou carga ou ambas as grandezas. Estes corpos remanescentes após o colapso darão origem a buracos negros mais gerais como os de Kerr, Reissner-Nordström e os de Kerr-Newman, cuja descrição matemática é mais complexa.

Ou quem sabe darão origem a singularidades nuas[4], ou seja, buracos negros sem horizonte de eventos.

3.2 Elemento de linha de Schwarzschild

O elemento de linha de Minkowski é válido apenas para regiões livres de fontes de campo gravitacional. Nas proximidades de um corpo altamente massivo o intervalo entre dois eventos é alterado, como já vimos. Schwarzschild em 1916 calculou o elemento de linha nas proximidades de uma estrela utilizando as equações de campo de Einstein e a definição de espaço tempo esfericamente simétrico[5].

As equações de Einstein, como já vistas no capítulo anterior, são escritas como:

$$G_{ab} = kT_{ab} \quad . \qquad (3.1)$$

Equação de campo de Einstein.

A solução de Schwarzschild[5] , válida apenas para o vácuo de maneira que para o interior de uma estrela essa solução não se verifica, é escrita como:

[4] Matematicamente é possível se obter uma singularidade nua destruindo um horizonte de eventos com alguns *gedanken experiments*.[11][14].

[5] O modo como Schwarzschild chegou ao elemento de linha conhecido por seu nome pode ser visto no apêndice D.

$$ds^2 = -(1-\frac{2M}{r})dt^2 + \frac{1}{(1-\frac{2M}{r})}dr^2 + r^2[d\theta^2 + (sen^2\theta)d\varphi^2] \ . \qquad (3.2)$$

Elemento de linha de Schwarzschild em coordenadas esféricas para regiões $r > 2M$.

A Lei de Gauss para gravitação nos permite dizer que o elemento de linha para uma estrela antes do colapso é o mesmo para a estrela após o colapso, de forma que o resultado de Schwarzschild inicialmente calculado para estrelas, também é válido para buracos negros $r>2M$. Após o colapso, teremos vácuo para a região $r< 2M$, sendo assim a solução de Schwarzschild agora também é válida para essa região.

Estudaremos abaixo algumas propriedades de um buraco negro de Schwarzschild obtidas a partir de sua métrica.

A resistência de Einstein e de grande parte dos físicos da época em acreditar numa singularidade proposta pelo resultado encontrado por Schwarzschild levaram ao esquecimento destes corpos por aproximadamente 25 anos. Em 1939 os estudos de Snyder e Oppenheimer sobre evolução estelar por processos termonucleares levaram a modelos em que a massa superior a $3M_\odot$ remanescente a uma supernova se contrairia totalmente a um ponto, nada podendo impedi-la. Esse estudo marcou o início da física dos buracos negros.

3.3 Propriedades de um Buraco Negro

Estudaremos neste tópico as propriedades de um buraco negro de Schwarzchild a partir de sua métrica.

3.3.1 Raio de Schwarzschild

Nos buracos negros newtonianos o raio crítico era a altura máxima que uma partícula de luz massiva podia alcançar sob ação da força peso. Em relatividade geral esse raio crítico possui um análogo chamado raio de Schwarzschild.

Nesta teoria relativista não existe o conceito de força, no lugar disso dizemos interação gravitacional; as partículas e a luz descrevem geodésicas.

O caminho que a luz percorre é caracterizado por $ds^2 = 0$ na quadrimensional superfície abstrata que estamos estudando, de forma que para o cálculo do raio de Schwarzschild de um buraco negro relativístico fazemos as seguintes restrições:

$$ds^2 = (1-\frac{2M}{r})dt^2 - (1-\frac{2M}{r})^{-1}dr^2 - r^2[d\theta^2 + (sen^2\theta)d\varphi^2] \quad . \qquad (3.3)$$

Métrica de Schwazsrchild.

Restrições à métrica

(1) Deslocamento radial $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + (sen^2\theta)d\varphi^2 = 0$,

(2) Geodésicas para fótons $ds^2 = 0$.

Segue então de (3.3) que:

$$0 = (1-\frac{2M}{r})dt^2 - (1-\frac{2M}{r})^{-1}dr^2 \qquad , \qquad (3.4)$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm(1-\frac{2M}{r}) \qquad \text{ou ainda} \qquad \frac{dt}{dr} = \pm(1-\frac{2M}{r})^{-1} \quad . \quad (3.5)$$

Analisando as equações anteriores (3.3)-(3.5) constatamos uma singularidade em $r = 2M$. Abaixo, Figura 9, esboçamos o gráfico da equação (3.5).

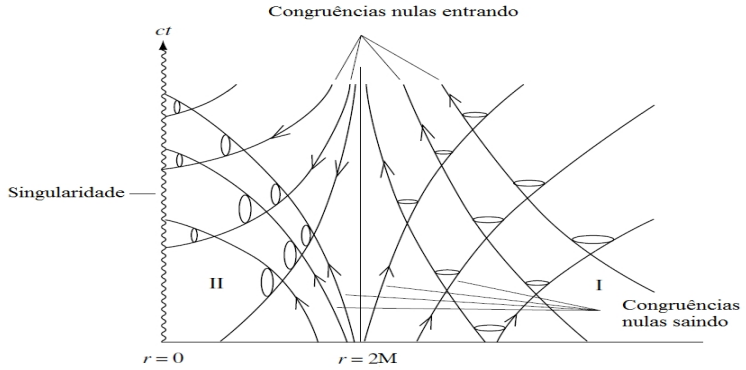

Figura 10: geodésicas tipo luz para a métrica de Schwarzschild [11].

A distância entre a singularidade $r = 0$ e a singularidade $r = 2M$ é chamado raio de Schwarzschild.

Sob um olhar físico, um buraco negro encurva o espaço tempo em suas proximidades ao ponto que a luz não encontra um caminho para sua fuga. Portanto, um fóton que parte eventualmente da singularidade e percorre um caminho radial, ficará aprisionado na região $r = 2M$.

De uma forma semelhante calculamos as geodésicas para uma partícula massiva caindo de forma radial (Figura 10).

O cálculo que nos permite encontrar geodésicas está explicado de forma resumida no apêndice B[6]

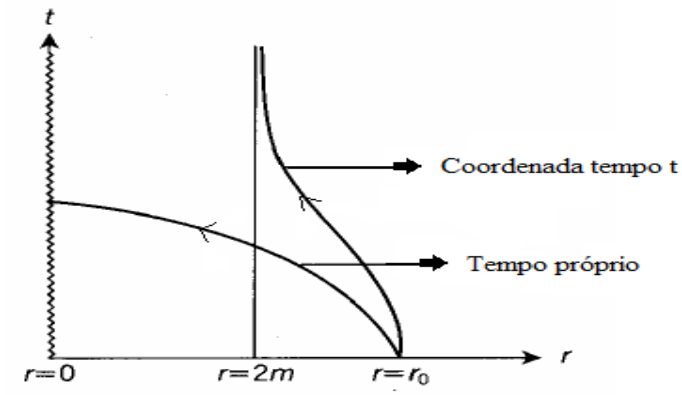

Figura 11: partículas caindo de forma radial para tempos t e τ [11].

Imagine que possamos enxergar, de uma nave espacial, um astronauta caindo de forma radial em um buraco negro de Schwarzschild. Segundo a Figura 10 nunca o veremos atravessar o horizonte de eventos, o que ocorrerá é que vamos vê-lo cada vez mais avermelhado devido ao desvio gravitacional para o vermelho, até sumir aos nossos olhos, enquanto que em seu referencial essa travessia se dará de forma rápida.

3.3.2 Singularidades

Ao observar a métrica de Schwarzschild em coordenadas esféricas notamos duas

[6] Por fugir ao conhecimento do aluno recém-iniciado ao curso de física optei por explica-lo no apêndice.

singularidades, uma em $r_1 = 0$ e outra em $r_2 = 2M$. Podemos, entretanto procurar outro sistema de coordenadas de tal forma que a métrica não seja degenerada em $r = 2M$.

Eddington e Finkelstein conseguiram encontrar tal sistema fazendo um processo de extensão analítica tomando

$$t \rightarrow \bar{t} = t + 2M \ln(r - 2M) \qquad , \qquad (3.6)$$

de forma que ao substituir t por $\bar{t}$ na solução de Schwarzschild encontramos a métrica de Eddington-Finkelstein para o parâmetro tempo avançada como sendo escrito

$$ds^2 = (1 - \frac{2M}{r})d\bar{t}^2 - \frac{4M}{r} dr d\bar{t} - (1 + \frac{2M}{r}) - r^2[d\theta^2 + (sen^2\theta)d\varphi^2] \ . \qquad (3.7)$$

Métrica de Eddington-Finkelstein para um parâmetro tempo avançado

Observamos que a singularidade em $r_2 = 2M$ não existe mais. Este tipo de singularidade é chamado singularidade removível, pois reflete uma deficiência no sistema de coordenadas utilizado e por isso são removíveis utilizando um "bom" sistema de coordenadas.

Essa extensão também é solução das equações de Einstein esfericamente simétrica, sendo regular para o intervalo $0 < r < \infty$. Utilizando-se do cálculo variacional podemos calcular as geodésicas desse espaço (Figura 11).

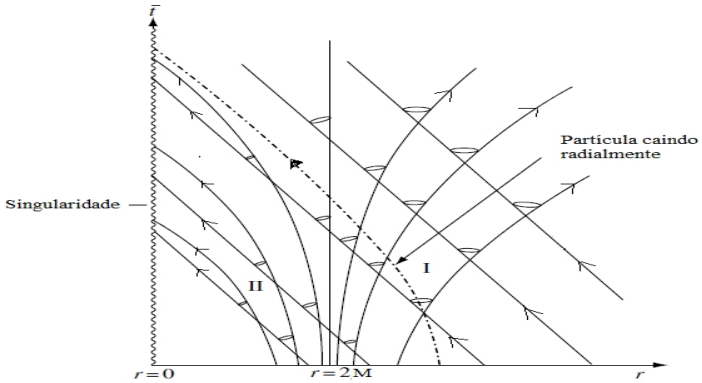

Figura 12: geodésicas tipo luz para a métrica de Eddington-Finkelstein (parâmetro tempo avançado) [11].

Existe uma região em comum coberta pelas coordenadas de Schwarzschild e a

de Eddington-Finkelstein na variedade diferenciável [7]. Podemos fazer então nessa região uma simples mudança de coordenadas a fim de observar eventos iguais sob pontos de vistas diferentes.

Retornemos ao caso em que temos um astronauta caindo em um buraco negro. Se no interior da nave espacial eu estou parado, em relação à estrela, observando o astronauta cair de forma radial, $d\Omega^2=0$, então como dito nunca o verei cruzar o horizonte de eventos. Entretanto se eu piloto a nave de uma forma engenhosa tal que consiga passar das coordenadas de Schwarzschild para as coordenadas de Eddington-Finkelstein, então o verei atravessar o horizonte de evento de forma rápida!

Talvez seja estranho, mas acontece que para se entender isso devemos ter em mente que o tempo se comporta de maneira diferente para observadores diferentes.

Notemos que mesmo após fazer a extensão analítica, a singularidade em $r = 0$ ainda permanece. Existem ainda outros sistemas de coordenadas, mas que possuem a singularidade em $r = 0$. Quando calculamos a curvatura nas proximidades deste ponto observamos que à medida que r tende a zero essa quantidade tende ao infinito, indicando a existência de uma singularidade física.

Existe uma extensão matemática de coordenadas, que alinham as geodésicas que saem, dada por:

$$t \to t^* = t - 2M \ln(r - 2M) \quad . \qquad (3.8)$$

De forma que, ao substituir t por t^* na solução de Schwarzschild encontramos a métrica de Eddington-Finkelstein para um parâmetro tempo retardado.

$$ds^2 = (1 - \frac{2M}{r})dt^{*2} + (1 + \frac{2M}{r})drdt^* - (1 + \frac{2M}{r})dr^2 - r^2[d\theta^2 + (sen^2\theta)d\varphi^2]. \qquad (3.9)$$

Métrica de Eddington-Finkelstein para um parâmetro tempo retardado

Essa extensão assim como a anterior é uma solução das equações de Einstein esfericamente simétrica regular no intervalo $0 < r < \infty$.

Observando suas geodésicas (Figura 12), constatamos que os fótons e as partículas massivas apenas saem de seu interior nada conseguindo adentrar $r=2M$. Essa

[7] Variedade diferenciável, de forma grosseira, é uma generalização da ideia de superfície [13].

é a métrica nas proximidades de uma estrutura hipotética no universo chamada **buraco branco**.

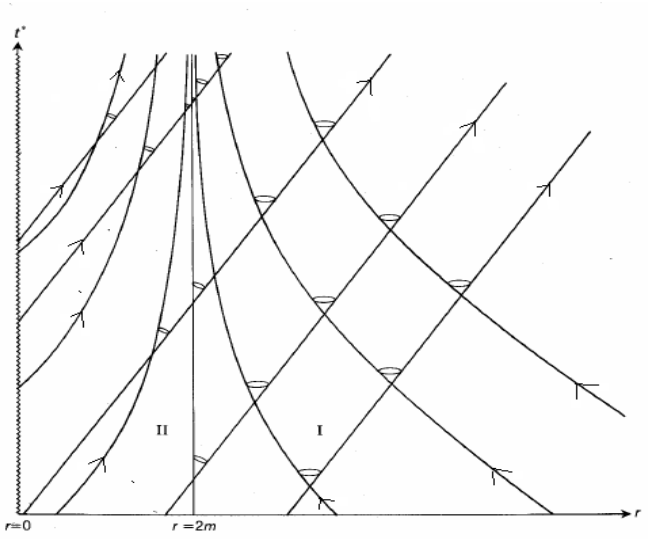

Figura 13: geodésicas tipo luz para a métrica de Eddington-Finkelstein (parâmetro tempo retardado) [11].

Assim como um buraco negro é uma região no espaço de que nada pode escapar, a versão tempo-invertido do buraco negro é uma região no espaço em que nada pode cair.

Existe ainda uma solução das equações de Einstein obtidas a partir da extensão analítica da métrica de Schwarzschild encontrada por Kruskal. Esta pode ser encontrada pela retificação simultânea das geodésicas tipo luz que entram e que saem[8].

$$ds^2 = \frac{16M^2}{r}\exp(-\frac{r}{2M})dt'^2 - \frac{16M^2}{r}\exp(-\frac{r}{2M})dx'^2 - r^2[d\theta^2 + (sen^2\theta)d\varphi^2] \quad . \tag{3.10}$$

Métrica de Kruskal.

A métrica de Kruskal também é chamada de Kruskal-Szekeres. Para o caso em que $\varphi = \theta = constante$ a métrica de Kruskal, se reduz à:

[8] Os termos geodésicas tipos luz que entram e que saem são traduções dos termos *ingoing* e *outgoing. radial null geodesics*.

$$ds^2 = \frac{16M^2}{r}\exp(-\frac{r}{2M})dt'^2 - \frac{16M^2}{r}\exp(-\frac{r}{2M})dx'^2 \quad . \tag{3.11}$$

Estas coordenadas possuem a vantagem de cobrir todo o espaço-tempo da solução de Schwarzschild maximamente estendida e são bem-comportadas em todos os lugares fora da singularidade física.

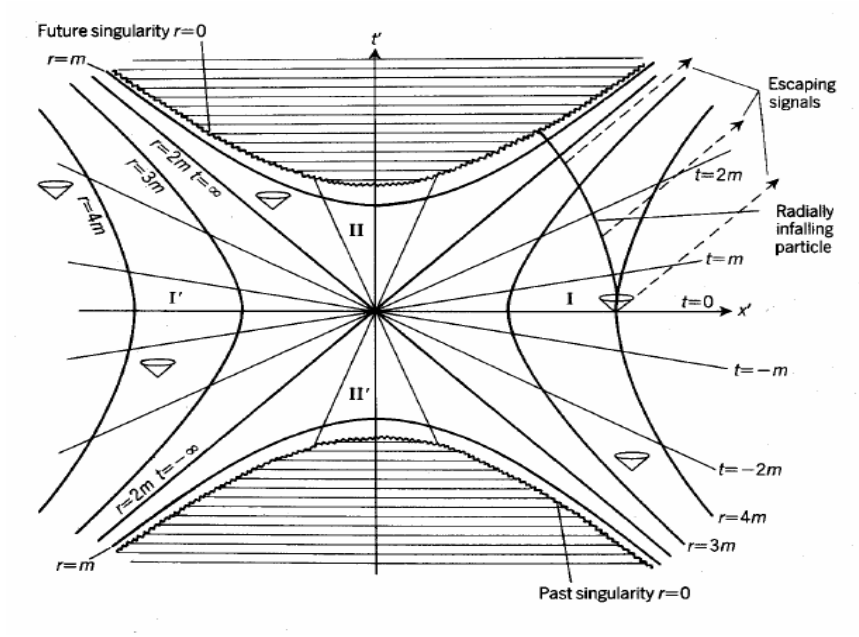

Figura 14: geodésicas tipo luz para métrica de Kruskal [11].

Na Figura 13 as regiões I e II correspondem às soluções de Eddington-Finkelstein retardadas. Sendo a região I a solução de Schwarzschild e a região II o interior ao horizonte de eventos. As regiões I' e II' correspondem as soluções de Eddington-Finkelstein avançadas.

O que é surpresa é a existência de uma nova região geometricamente idêntica a solução exterior de Schwarzschild assintoticamente plana. A estrutura que conecta I à I' é chamada **buracos de minhoca**.

3.4 Observações Sobre a Métrica

Como já mencionado anteriormente, embora seja difícil visualizar o espaço de Minkowski, podemos visualizar a influência da massa sobre o tempo e sobre o espaço.

Enxerguemos a métrica de Minkowski como uma quantidade espacial correspondendo à métrica da região onde vivemos $dx^2+dy^2+dz^2$ (em coordenadas esféricas) subtraída de uma quantidade c^2dt^2, tal que

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2[d\theta^2 + (sen^2\theta)d\varphi^2] \quad . \qquad (3.12)$$

Podemos tentar dar uma interpretação de forma análoga para a métrica de Schwarzschild imaginando-a como uma quantidade c^2dt^2 alterada pela presença da matéria, subtraída da métrica de R^3, alterada também pela presença da matéria presente no espaço.

$$ds^2 = \underbrace{(1-\frac{2M}{r})dt^2}_{\text{Quantidade temporal alterada pela preseça de matéria}} \underbrace{- \frac{1}{(1-\frac{2M}{r})}dr^2 - r^2[d\theta^2 + (sen^2\theta)d\varphi^2]}_{\text{Métrica de } R^3 \text{ alterada pela presença de matéria}} \qquad (3.13)$$

De forma que no limite em que a matéria se anula, $M \rightarrow 0$, recuperamos a métrica de Minkowski (3.12).

É difícil visualizar uma 3-superfície com curvatura não nula. Entretanto, se tomamos $dt = 0$ e caminharmos em uma direção onde $\theta = \pi/2$, a métrica de Schwarzschild se reduz a:

$$ds^2 = \frac{1}{(1-\frac{2M}{r})}dr^2 - r^2d\varphi^2 \quad . \qquad (3.14)$$

Essa variedade pode ser mais bem entendida se fizermos sua imersão num espaço plano tridimensional euclidiano (Figura 14).

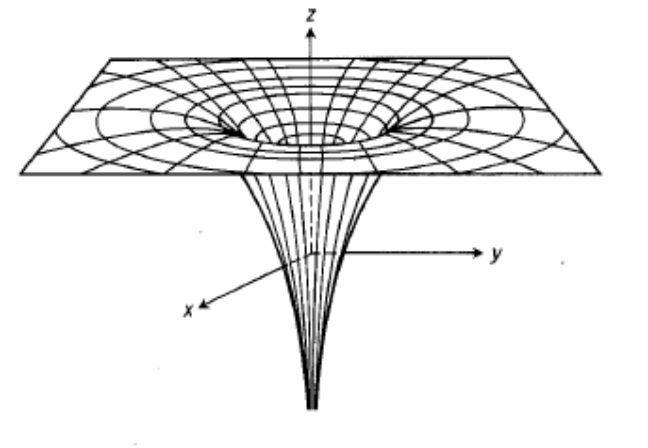

Figura 15: imersão da variedade em R^3 para o caso t = constante e $\theta = \pi/2$ [11].

Podemos observar de forma mais clara na métrica (3.14) que a distância entre dois pontos, nas redondezas do buraco negro, depende explicitamente de sua massa e da distância em que se encontram esses pontos.

Capítulo 4

4. DETECTANDO BURACOS NEGROS

Os Buracos Negros, como já ditos, são corpos celestes hipotéticos, altamente densos que aprisionam a própria luz emitida eventualmente. Com toda luz aprisionada, nos perguntamos como poderíamos verificar sua existência, uma vez que qualquer corpo celeste é detectado, preferencialmente, a partir de ondas eletromagnéticas emitidas?

Em verdade, podemos observá-lo por certo período de tempo quando a matéria de uma estrela que orbita suas proximidades é atraída para o seu interior (Figura 16). Quando esse fenômeno ocorre, os elementos no estado gasoso que formam a estrela começam a ser sugados para o buraco negro formando um disco de acreção em torno deste que após ser comprimido e consequentemente aquecido torna-se ionizado. Como sabemos, partículas carregadas descrevendo movimento circular geram ondas eletromagnéticas [2].

No caso do disco de acreção, antes que as partículas que o compõem caiam para o buraco negro, emitirão ondas na faixa dos raios-x e o papel dos astrônomos é detectar essa fonte de raios-x sendo a detecção feita, portanto, de forma indireta.

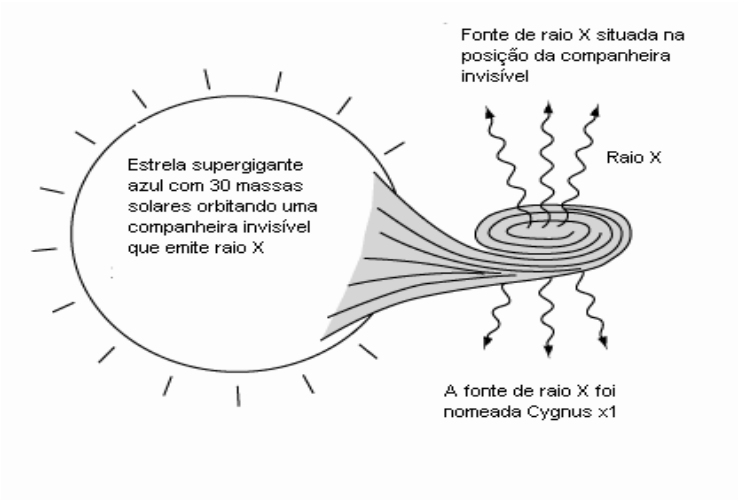

Figura 17: concepção artística de um buraco negro sugando uma estrela [16].

Vários candidatos a buracos negros já foram indiretamente encontrados, de forma que a comunidade dos físicos atualmente tem poucas dúvidas sobre a sua existência, mesmo sendo sua forma de detecção indireta, como é o caso de Cygnus X1, uma fonte de raios-X muito compacta a cerca de 6000 anos luz da Terra, localizada na constelação de Cygnus [1][4].

Cygnus X-1 é um dos mais fortes candidatos a buraco negro conhecido. A tabela abaixo nos apresenta estrelas acreditadas como possíveis companheiras de buracos negros. Também é apresentada a massa estimada desses buracos negros.

Nome da estrela	**Massa do Buraco negro em unidades de massas solares (Sol= 1$M_\odot$)**
A0620-00	3 - 4
Cygnus X-1 (HDE 226868)	4 - 8
Sco X-1	3 - 10
GS2000+25	3 - 10
GX339-4	3 - 10
V 404 Cygni	8 - 12
Nova Muscae 1991	3 - 10
Nova Ophiuchi 1977	6 - 7

Tabela 2: estrelas acreditadas como possíveis companheiras de buracos [15].

Podemos nos fazer a seguinte pergunta: caso um buraco negro não emita raios-X seria possível detecta-lo?

Na verdade podemos detectar uma classe de buracos negros chamados buracos negros supermassivos observando seu efeito gravitacional sobre algumas estrelas em suas proximidades. Por exemplo, utilizando-se imagens de alta resolução, vide Figura 17, observamos que estrelas percorrem uma elipse em torno de um objeto invisível. Através destas imagens podemos obter o semi-eixo maior *a* dessas elipses assim como seu período *T*.

Pela terceira lei de Kepler, calculamos a massa M do objeto que as estrelas orbitam[9].

$$T = \frac{2a^{3/2}\pi}{\sqrt{GM}} \quad , \qquad (4.1)$$

Terceira Lei de Kepler

ou ainda

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} \quad . \qquad (4.2)$$

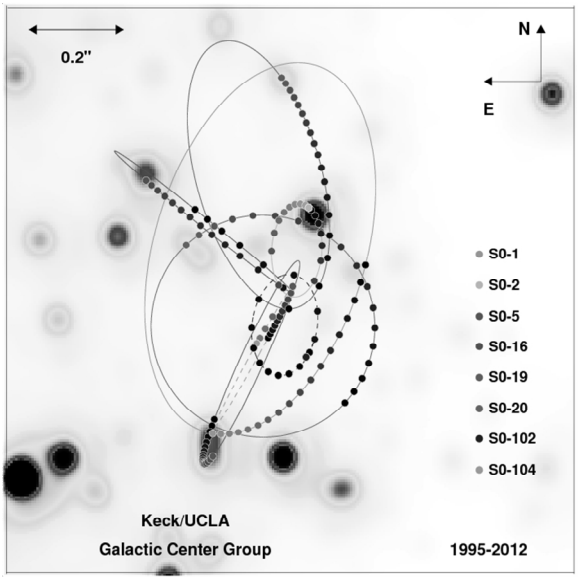

Figura 18: imagem da órbita de estrelas no centro de nossa galáxia durante um período de dezessete anos [4].

Como não emitem radiação do espectro visível passam despercebidos nas imagens de alta resolução, como é no caso da fonte de ondas de radio Sgr A*, localizada a 2 600 anos-luz da Terra [4].

Em números, percebemos que as estrelas possuem velocidades superiores a 1500

[9]Caso o aluno não se recorde das leis de Kepler, recorra ao apêndice A.

Km/s orbitando um objeto invisível que possui massa de 3,7 milhões de vezes a massa do Sol. Observações com radio telescópios nos mostram que o raio dessa fonte é da ordem de 10^{11} *m*, comparável à distância Terra/Sol. Essas medidas e observações sugerem que essa fonte de ondas de radio é um buraco negro com raio de Schwarzschild $r = 1{,}0 \times 10^{10}$ *m* [4].

Esses buracos negros super massivos nos centros de uma galáxia dão origem, em um determinado instante, ao que chamamos Quasares, *Quase Stellar Radio Sources*, intensas fontes de radio extremamente compacta e luminosa que emitem mais energia do que centenas de galáxias juntas [2]. Essas ondas são geradas de forma semelhante ao processo de emissão de raios X por um buraco negro. No lugar de um buraco negro temos um super buraco negro sugando agora várias estrelas.

As galáxias que possuem esse tipo de buraco negro são chamadas galáxias ativas. Segue abaixo, Tabela 3, uma relação com uma sequência de galáxias suspeitas de abrigar buracos negros supermassivos em seus centros. Apresentamos também a massa estimada desses buracos negros.

Nome da Galáxia	**Massa do Super-Buraco negro em unidades de massas solares (Sol= 1$M_\odot$)**
IE1740.9-2942	10 mil
SgrA*	2 milhões
Messier 32	3 milhões
Centaurus A	< 14 milhões
Messier 31	10 milhões
Messier 106	40 milhões
NGC 3379	50 milhões
NGC 3377	100 milhões
Messier 84	300 milhões
NGC 4486B	500 milhões
NGC 4594	1 bilhão
NGC 4261	1 bilhão
NGC 3115	2 bilhões
Messier 87	3 bilhões

Cygnus-A	5 bilhões
NGC 4151	Não Conhecido
Messier 51	Não Conhecido

Tabela 3: galáxias que atualmente suspeita-se possuir buracos negros supermassivos em seus centros [15].

Acredita-se atualmente que possivelmente toda grande galáxia possua um buraco negro supermassivo com massa equivalente a milhões ou bilhões de estrelas, em seu centro, inclusive a Via Láctea.

Suspeita-se que esses braços negros tenham se formado no início do Universo, a partir de gigantescas nuvens de gás ou então, a partir do "colapso" de imensos aglomerados de estrelas que colapsaram sobre a sua própria gravidade depois das galáxias já formadas [15].

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Fizemos uma abordagem clássica dos buracos negros utilizando a física newtoniana a fim de que um aluno de graduação possa familiarizar-se com suas propriedades sem muitos cálculos ou complicações. Vimos como são detectados e também apresentamos uma classe de buracos negros chamados super buracos negros que são responsáveis por um fenômeno muito energético chamado *quasar*.

Mostramos que a abordagem newtoniana baseava-se no comportamento corpuscular da luz, que caiu em desuso depois das experiências ondulatórias de Fresnel e Huygens. Após tais experiências esses corpos conjecturados por Mitchell/Laplace foram esquecidos.

Mais tarde, no século XX, com a teoria da relatividade geral pudemos dar um novo tratamento a esses corpos densos. Nessa teoria o espaço-tempo torna-se tão curvo nas proximidades desses corpos ao ponto que a luz não encontra um caminho para sua fuga. Sendo desnecessárias as hipóteses de Mitchell/Laplace, essa abordagem ganhou cada vez mais adeptos chegando ao ponto bastante grande de aceitação.

Para análise dos eventos nas proximidades dos buracos negros estáticos utilizamos a métrica de Schwarzschild, ferramenta matemática o qual nos permite medir distâncias, desenvolvida inicialmente para estrelas e mais tarde generalizada para buracos negros estáticos descarregados, isto é, sem rotação e sem cargas.

Estudamos o comportamento da luz e das partículas massivas nas redondezas desses corpos segundo a relatividade geral chegando a resultados interessantíssimos como o raio de Schwarzschild e a existência de uma singularidade física em seu centro, região de densidade infinita. Indicamos também outras soluções das equações de Einstein que nos levam a estruturas igualmente curiosas como os buracos de minhocas e os buracos brancos.

Também mostramos como os buracos negros são detectados.

Apesar de grande parte de o trabalho basear-se na determinação de trajetórias das partículas de luz ou massivas, a partir da relatividade geral, ainda não conseguimos explicar o que ocorre com tais partículas nas proximidades vizinhas ou na própria singularidade.

Se por outro lado reduzimos a ordem de grandeza em estudo no quais

fenômenos quânticos são levados em consideração, devemos ter em mente que todo seu determinismo, nas proximidades ou não da singularidade devem ser desconsideradas, devido ao princípio da incerteza de Heisenberg.

Isso sugere a necessidade de uma nova teoria da gravitação que descreva não apenas fenômenos macroscópicos, mas também fenômenos quânticos.

Na monografia ainda deixamos de falar de vários fenômenos associados a geometria relativos aos buracos negros estáticos, como os efeitos de maré e também o desvio sofrido por um feixe de luz ao percorrer suas proximidades.

O objetivo do trabalho foi introduzir a um aluno que possui um curso de cálculo III a noção de buracos negros e elementos de relatividade geral sem as complexidades da álgebra tensorial, de forma que não precisaria esperar quatro anos de graduação para entrar em contacto com algumas dessas ideias.

6. CONCLUSÃO

Podemos nos perguntar o porquê de se estudar buracos negros ao invés de nos preocuparmos com outras estruturas mais importantes como asteróides que estão em rota de colisão com a Terra ou mesmo com o desenvolvimento de novas fontes de energia limpa.

Acontece que os buracos negros são objetos muito curiosos, “sugam” toda matéria e informação que atravessam seu caminho conduzindo-os para uma região pontual. O tempo e o espaço se comportam de uma forma diferente para regiões distintas em suas proximidades.

É razoável tomar esse comportamento exótico de algumas grandezas físicas sob o ponto de vista da mecânica clássica como ponto de partida para sua pesquisa.

Se para você é necessário algum motivo palpável para estuda-los, tome então sua colisão com outro buraco negro. Este evento gera uma fonte temporária de ondas gravitacionais, previstas teoricamente pela relatividade geral e ainda não detectadas.

Os buracos negros também podem ser fundamentais para se entender corretamente a gravidade, uma das quatro interações fundamentais, os modelos cosmológicos de evolução de nosso Universo, assim como também para a confirmação dos modelos de evolução estelar.

É verdade que talvez em um futuro próximo não encontremos nenhuma aplicação do estudo que envolve os buracos negros na vida humana. Entretanto, se esse fosse o critério sobre o qual baseamos o que devemos estudar, não haveria computadores para nos dizer isso.

7. APÊNDICES

APÊNDICE A

AS LEIS DE KEPLER

Durante o século XVI o astrônomo dinamarquês Tycho Brahe observando o céu, em um trabalho patrocinado por nobres, registrou vários dados a respeito da órbita dos planetas. Para interpretação destes dados colhidos, Tycho Brahe contratou um talentoso matemático chamado Johannes Kepler que passou a ser seu assistente. Só após a morte de Tycho Brahe, Kepler conseguiu dar uma interpretação a esses dados, enunciando o que hoje conhecemos como Leis de Kepler [6].

1ª Lei

Todos os planetas se movem segundo órbitas elípticas, com o Sol posicionado em um dos focos, como podemos observar na Figura 18 abaixo.

.

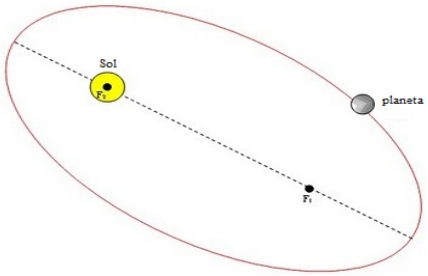

Figura 19: Os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, que ocupa um dos focos da elipse [17].

2ª Lei

A linha que une qualquer planeta ao Sol varre áreas iguais em tempo iguais, como podemos observar na figura a seguir.

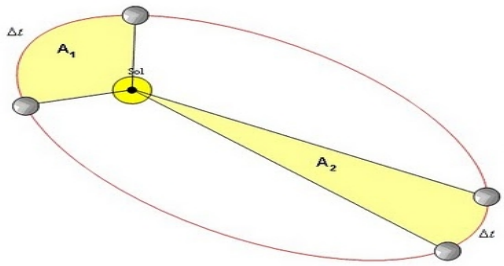

Figura 20: O segmento que une o sol a um planeta descreve áreas iguais em intervalos de tempo iguais [18].

3ª Lei

O quadrado do período de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior de sua órbita.

$$T^2 = Cr^3 \qquad \text{(A.1)}$$

Devemos ter em mente que esses resultados deram força a chamada Lei da Gravitação Universal desenvolvida por Issac Newton [19]. Essa lei é uma relação matemática mais fundamental do que as Leis de Kepler, de forma que podemos deduzir as conclusões de Kepler a partir da descoberta de Newton [6].

APÊNDICE B

CRONOLOGIA DOS BURACOS NEGROS

Apesar dos buracos negros serem um produto da relatividade geral (século XX) , previsões sobre corpos semelhantes datam mais de 200 anos antes. A partir do desdobramento das leis da gravitação universal de Newton com a teoria corpuscular da luz o astrônomo amador britânico John Michell e posteriormente o grande matemático Laplace conjecturaram, no final do século XVIII, que estrelas densas suficientemente, as quais a velocidade de escape fosse maior que a da luz não poderiam ser observadas. Laplace, em seu livro *Exposition du Systèm Du Monde*, as classificou como estrelas escuras. Essas precursoras dos buracos negros também são chamadas hoje de buracos negros newtonianos [28].

O conceito moderno de buraco negro surgiu durante o século XX. De forma mais exata, após a publicação de Oppenheimer e Snyder sobre os seus estudos a respeito do colapso estelar em 1939. Embora esses corpos já pudessem ser descritos geometricamente em 1916 com a solução de Schwarzschild.

Segue abaixo uma linha do tempo a respeito das descobertas sobre estes corpos celestes [20].

1783 – John Michell e posteriormente Pierre Laplace (1796) concebem as estrelas escuras.

1916 – Karl Schwarzschild encontra a solução de vácuo esfericamente simétrica das equações de Einstein que contempla buracos negros sem rotação.

1916 – Hans Reissner e independentemente Gunnar Nordström (1918) obtêm a solução das equações de Einstein correspondente a buracos negros estáticos com carga elétrica.

1939 – Julius Oppenheimer e Hartland Snyder concluem que estrelas, ao colapsarem, podem dar origem a buracos negros.

1963 – Roy Kerr encontra a solução de vácuo das equações de Einstein para buracos negros com rotação.

1965 – Roger Penrose prova que dentro do horizonte de eventos de um buraco negro sempre se esconde uma singularidade.

1967 – John Wheeler cunha o termo buraco negro.

1971 – Um grupo de astrônomos e físicos experimentais observa fortes evidências de que Cygnus X-1 abriga um buraco negro.

1971 – Stephen Hawking prova que a soma das áreas dos horizontes de eventos de um sistema de buracos negros nunca decresce por nenhum processo físico clássico.

1973 – Jacob Bekenstein associa entropia aos buracos negros e enuncia a Segunda Lei Generalizada da Termodinâmica.

1974 – Stephen Hawking descobre que buracos negros podem evaporar quanticamente.

2004 – Hawking volta atrás e afirma que a informação contida nos buracos negros não desaparece.

APÊNDICE C

GEODÉSICAS

A geodésica é a menor distância que une dois pontos de forma que, para pequenas variações da forma da curva, o seu comprimento é estacionário. Para seu cálculo, recorremos ao princípio da mínima ação.

Definimos um funcional chamado ação, dado por:

$$S[y] = \int_{x_1}^{x_2} L(y(x), \dot{y}(x), x)dx \quad , \tag{C.1}$$

onde $L(y, \dot{y}, x)$ é a lagrangiana do sistema; y e $\dot{y}$ são funções que possuem como argumento x; de forma específica $\dot{y}$ é a derivada de y em relação a x.

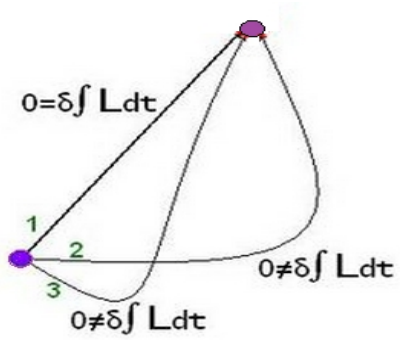

Figura 21: Variação de uma curva [21].

Se exigirmos que a ação seja estacionária, Figura 20, então temos:

$$\delta S[y] = 0 \quad . \tag{C.2}$$

Encontraremos, impondo certas condições, a relação abaixo:

$$\frac{\partial L}{\partial x^a} - \frac{d}{du}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a}\right) = \delta S[y] = 0 \qquad , \qquad \text{(C.3)}$$

Equações de Euler –Lagrange.

onde os parâmetros x^a e $\dot{x}^a$ são chamadas coordenadas e velocidades generalizadas, respectivamente.

Para o estudo de distâncias mínimas utilizamos a lagrangiana abaixo:

$$L = \sum_{ab} [g_{ab}(x)\dot{x}^a \dot{x}^b]^{1/2} \qquad , \qquad \text{(C.4)}$$

Lagrangiana para o cálculo de geodésicas em superfícies, escrita de forma compacta.

onde o símbolo $\dot{}$ acima de uma função denota derivada em relação a u e g_{ab} é uma matriz. Conhecendo a lagrangiana do sistema podemos então calcular as geodésicas. A princípio basta substituir (C.4) em (C.3). Entretanto isto nos levará a uma série de complicações, sendo mais interessante trabalhar com as equações de Euler-Lagrange para o caso em que temos derivadas parciais de L^2.

$$\frac{\partial L^2}{\partial x^a} - \frac{d}{du}\left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^a}\right) = 0 \qquad . \qquad \text{(C.5)}$$

Equações de Euler-Lagrange para o caso em que temos L^2.

Se conhecermos a matriz g_{ab}, que obtemos diretamente por meio métrica estudada, então podemos calcular as geodésicas desta variedade.

Calculemos, por exemplo, as geodésicas da solução de Schwarzschild, de um modo mais elegante ao utilizado na seção 4.3.1.

Lá exigimos que

(1) Deslocamento radial $d\Omega^2 = 0$.

(2) Geodésicas para fótons $ds^2 = 0$.

A matriz g_{ab} para o caso do espaço-tempo de Schwarzchild é escrita em coordenadas esféricas como:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} (1-\frac{2m}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1-\frac{2m}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

A métrica, de forma alternativa, pode ser escrita de forma compacta como:

$$ds^2 = \sum_{ab} g_{ab} dx^a dx^b \quad . \qquad \text{(C.6)}$$

Para luz em particular, escrevemos a métrica como:

$$ds^2 = \sum_{ab} g_{ab} dx^a dx^b = 0 \qquad \text{(C.7)}$$

Seja a lagrangiana de nosso sistema:

$$L^2 = [(1-\frac{2m}{r})\dot{t}^2 - (1-\frac{2m}{r})^{-1}\dot{r}^2] \quad . \qquad \text{(C.8)}$$

Substituindo (C.8) nas equações de Euler-Lagrange (C.5) obteremos duas relações:

- para $\dot{x}^a = \dot{t}$ teremos:

$$\dot{t}(1-\frac{2m}{r}) = const. \quad , \qquad \text{(C.9)}$$

- para $\dot{x}^a = \dot{r}$ teremos:

$$\dot{r}(1-\frac{2m}{r})^{-1} = const. \quad . \qquad \text{(C.10)}$$

Substituindo (C.9) em (C.7), teremos:

$$\dot{r}^2 = k^2 \quad . \qquad \text{(C.11)}$$

Podemos escrever *t=t(r)*, de forma que a derivada de *t* em relação à *r* é escrita como:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt/du}{dr/du} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} \qquad ; \qquad \text{(C.12)}$$

segue de (C.9) e de (C.10) que ,

$$\frac{dt}{dr} = \frac{r}{r-2m} \qquad ; \qquad \text{(C.13)}$$

integrando teremos,

$$t = r + 2m\ln|r-2m| + const \qquad , \qquad \text{(C.14)}$$

ou

$$t = -(r + 2m\ln|r-2m| + const) \qquad . \qquad \text{(C.15)}$$

A partir das relações acima traçamos o gráfico da figura 21.

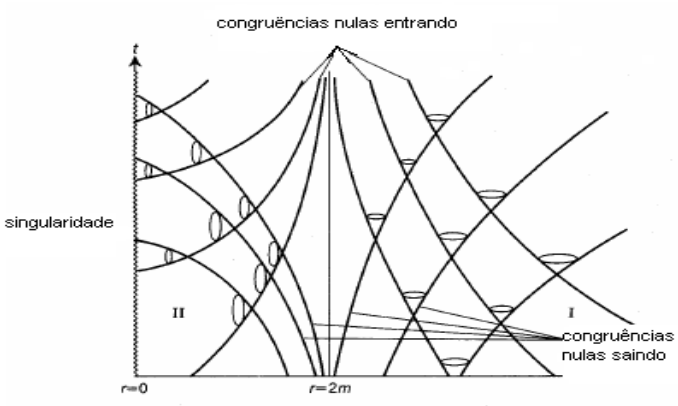

Figura 22: geodésicas tipo luz para a métrica de Schwarzschild [11].

Da mesma forma que fizemos para a solução de Schwarzschild podemos fazer para as outras soluções.

Para melhor entender a princípio variacional e o formalismo lagrangiano consulte [22].

APÊNDICE D

AS EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN

As equações de campo de Einstein são equações de sua própria teoria da gravitação, chamada relatividade geral, que descreve como a matéria "gera" gravidade. Ela é escrita como

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} \quad . \qquad \text{(D.1)}$$

Equações de campo de Einstein.

As equações de campo de Einstein se reduzem à equação de Poisson num limite não relativista, isto é, a velocidades baixas e campos gravitacionais pouco intensos.Para saber como Einstein chegou a essa relação assim como as ideias que o influenciaram, consulte as referências [11][7].

A parte esquerda da equação (D.1) nos informa a respeito da geometria deformada pela matéria descrita na parte direita da equação. As letras com índices são chamados tensores. Para uma primeira leitura, podemos imagina-lo como uma forma compacta de escrever equações relativamente grandes como as de Einstein.

O tensor de Einstein é escrito em função de outros tensores da seguinte maneira:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad , \qquad \text{(D.2)}$$

Tensor de Einstein escrito em função de outros tensores.

onde esses outros tensores também possuem nome e são escritos em função dos coeficientes da métrica g_{ab}, que seguem abaixo:

Tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\beta_{\beta\nu} - \partial_\beta \Gamma^\beta_{\mu\nu} + \Gamma^\beta_{\tau\mu}\Gamma^\tau_{\beta\nu} - \Gamma^\beta_{\tau\beta}\Gamma^\tau_{\mu\nu} \quad . \qquad \text{(D.4)}$$

Escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad . \qquad \text{(D.5)}$$

Símbolo de Christoffel[10],

$$\Gamma^\beta_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha}(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \quad . \qquad \text{(D.6)}$$

O tensor momento energia para o fluido perfeito também é escrito em função de outros tensores.

$$T_{\mu\nu} = (\rho_o + p)u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu} \quad , \qquad \text{(D.3)}$$

Tensor Momento-Energia para um fluido perfeito escrito em função de outros tensores para o caso de um fluido perfeito.

onde ρ_o é a densidade própria, p é a pressão escalar, u é a quadri-velocidade referentes ao fluido perfeito.

A partir de agora, nos preocuparemos em encontrar uma métrica esfericamente simétrica a partir das equações de Einstein para o vácuo. Métrica a qual podemos utilizar de forma aproximada para corpos de lenta rotação.

Para o vácuo $\rho_o = 0$ assim como $p = 0$. Isso implica que $T_{\mu\nu} = 0$. Por sua vez,

$$R_{\mu\nu} = 0 \text{, pois } T_{\mu\nu} = 0 \quad . \qquad \text{(D.7)}$$

Os coeficientes de uma métrica esfericamente simétrica de uma forma genérica podem ser escritos como [23]:

$$g_{\mu\nu} = diag(A(r), -B(r), -r^2, -r^2 \sin^2\theta) \quad . \qquad \text{(D.8)}$$

[10] O símbolo de Cristoffel não é um tensor.

Devemos nos incumbir de encontrar *A(r)* e *B(r)*.

Substituindo a métrica esfericamente simétrica nas equações de Einstein encontraremos o conjunto de equações diferenciais

$$R_{00} = -\frac{A''}{2B} + \frac{A'}{4B}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{A'}{rB} = 0 \quad , \qquad \text{(D.9)}$$

$$R_{11} = \frac{A''}{2A} - \frac{A'}{4A}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}\right) - \frac{B'}{rB} = 0 \quad , \qquad \text{(D.10)}$$

$$R_{22} = \frac{1}{B} - 1 + \frac{r}{2B}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right) = 0 \quad , \qquad \text{(D.11)}$$

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta = 0 \quad . \qquad \text{(D.12)}$$

Para o cálculo do tensor de Ricci devemos calcular antes todos os símbolos de Christoffel assim como as derivadas dos coeficientes da métrica.

Multiplicando a equação (D.10) por *(B/A)* e somando este resultado à equação (D.12) encontraremos que $A'B - B'A = 0$. Isso implica que *AB = α = constante*. Utilizando essa relação na equação (D.11) encontraremos que:

$$\frac{d}{dr}(rA) = k = const \quad , \qquad \text{(D.13)}$$

e que

$$A(r) = \alpha\left(1 + \frac{k}{r}\right) \quad \text{e} \quad B(r) = \left(1 + \frac{k}{r}\right)^{-1}. \qquad \text{(D.14)}$$

No limite de campos fracos [9], encontramos a relação:

$$g_{00} \approx \left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right) \quad . \qquad \text{(D.15)}$$

Por outro lado,

$$A(r) = (1 + \frac{k}{r}) \quad . \qquad \text{(D.16)}$$

Igualando (D.16) à (D.15), obteremos:

$$\frac{A(r)}{c^2} = (1 + \frac{2\Phi}{c^2}) \quad , \qquad \text{(D.17)}$$

e escrevemos a métrica como:

$$ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r})dt^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1} dr^2 + r^2[d\theta^2 + (sen^2\theta)d\varphi^2] \quad .$$

(D.18)

Essa a é famosa métrica encontrada por Karl Schwarzschild, físico alemão que a descobriu com um mês após o lançamento da teoria da relatividade geral de Einstein. Teve pouco tempo para estudar as consequências de seu trabalho uma vez que veio falecer pouco tempo depois de sua publicação.

Para mais detalhes a respeito destas contas consulte a referência [23].

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] NASA. Black Holes: From Here to Infinity. Disponível em <http://www.spitzinc.com/pdfs/educ_guide_blackholes_nasa.pdf> Acesso em 7 jan. 2014.

[2] OLIVEIRA FILHO, Kepler de Souza; SARAIVA, Maria de Fátima Oliveira. **Astronomia e astrofísica.** 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2004. xviii, 557 p. ISBN 8588325233.

[3] Google Imagens. Lançamento vertical para cima. Disponível em <http://fisicaematematicaprofegrasi.blogspot.com.br/> Acesso em 9 jan. 2014.

[4] YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A.; SEARS, Francis Weston; ZEMANSKY, Mark Waldo. **Física.** 12. ed. São Paulo: Addison-Wesley: Pearson, 2008. 4 v. ISBN v.1 9788588639300 : v.2 .

[5] MITCHELL, John, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 1784 **74**, doi: 10.1098/rstl.1784.0008, published 1 January 1784 .

[6] TIPLER, Paul Allen; MOSCA, Gene. **Física:** para cientistas e engenheiros. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006. 3 v. ISBN v.1 9788521614623. ISBN: v.2 9788521614.

[7] M. Cattani, *Dedução das equações da Teoria de Gravitação de Einstein em um Curso de Graduação*, Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, vol.20, n°1, p.27-37, março 1998.

[8] GAZZINELLI, Ramayana. **Teoria da relatividade especial.** 2. ed. São Paulo: Blücher, 2009. viii, 147 p. ISBN 9788521204886.

[9] NUSSENZVEIG, H. Moyses. **Curso de física básica.** 5. ed. rev. e atual. São Paulo: Edgard Blücher, 2013. ISBN 9788521207450: v. 4.

[10] Google Imagens. Cone de Luz no Espaço de Minkoski. Disponível em <http://phylos.net/fisica/tre/tre-cap5/> Acesso em 9 jan. 2014.

[11] D'INVERNO, Ray. **Introducing Einstein's relativity.** Oxford (England): Clarendon Press; New York: Oxford University Press, 1992. 383 p. ISBN 0198596863.

[12] Google Imagens. Esfera em R^3. Disponível em <http://phylos.net/fisica/tre/tre-cap5/> Acesso em 9 jan. 2014.

[13] GREENBERG, Marvin Jay. **Euclidean and non-euclidean geometries:** development and history. 3rd ed. New York: W. H. Freeman, c1993. xvi, 483p. ISBN 0716724464 (enc.)

[14] R. Wald, *Gedanken experiments to destroy a black hole*, Maryland, Ann. Physics, v. 82, p. 548-556, 1974.

[15] UFMG- Observatório Astronômico Frei Rosário. Buraco Negro. Disponível em < http://www.observatorio.ufmg.br/pas19.htm> Acesso em 7 jan. 2014.

[16] Google Imagens. Concepção Artística de um Buraco Negro Sugando uma Estrela. Disponível em <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/astro/blkbin.html> Acesso em 9 jan. 2014.

[17] Google Imagens. Os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, que ocupa um dos focos da elipse. Disponível em <http://cosmoemportugues.blogspot.com.br/2010/03/johannes-kepler.html> Acesso em 23 jan. 2014.

[18] Google Imagens. O segmento que une o sol a um planeta descreve áreas iguais em intervalos de tempo iguais. Disponível em <http://cosmoemportugues.blogspot.com.br/2010/03/johannes-kepler.html> Acesso em 23 jan. 2014.

[19] NEWTON, Isaac. **Principia:** princípios matemáticos de filosofia natural. São Paulo: Nova Stella: Edusp, 1990. nv.

[20] J.Castiñeiras, L.C. Crispino, G. A. Matsas. Horizonte de eventos. Disponível em <http://www.ift.unesp.br/users/matsas/horizonte.pdf> Acesso em 7 jan. 2014.

[21] Google Imagens. Variação de uma curva. Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Princ%C3%ADpio_de_Hamilton> Acesso em 9 jan. 2014.

[22] LEMOS, Nivaldo A. **Mecânica analítica.** 2. ed. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2007. vi, 386 p. ISBN 9788588325241.

[23] HOBSON, M. Efstathiou, G. Lasenby,A. **General Relativity: an introduction for physicists.**.ed.Cambridge University Press,2006. 572 p. ISBN 978-0-521-53639-4.

[24] R. Wald, **General relativity**. Chicago: University of Chicago Press; 1984. 491 p. ISBN 0226870332.

[25] COUPER, Heather. **Buracos negros.** São Paulo: Moderna, 1997. 45p. ISBN (Enc).

[26] FABER, Richard L. **Differential geometry and relativity theory:** an introduction. New York: Marcel Dekker, c1983. 255p. ((Monographs and textbooks in pure and applied mathematics ; 76)) ISBN 082471749X (enc.)

[27] FEYNMAN, Richard P.; LEIGHTON, Robert B.; SANDS, Matthew L. **Feynman, lições de física.** Ed. definitiva. Porto Alegre: Bookman, 2008. 3 v. ISBN v.1 9788577802555 (enc.).

[28]LAPLACE, Pierre S. **Exposition du système du monde**, Cambridge University Press, 2009, ISBN 978-1-108-00209-7.