

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**Efeitos Não Lineares em Relatividade Geral e  
Matéria Escura em Galáxias**

Álefe de Oliveira Freire de Almeida

Monografia de Conclusão de Curso

Vitória-ES

2013

Álefe de Oliveira Freire de Almeida

**Efeitos Não Lineares em Relatividade Geral e  
Matéria Escura em Galáxias**

Monografia apresentada ao Departamento  
de Física/CCE, Universidade Federal do  
Espírito Santo, como parte dos requisitos  
para obtenção do título de Bacharel em  
Física.

Orientador: Davi C. Rodrigues

Vitória-ES

2013

Álefe de Oliveira Freire de Almeida

**Efeitos Não Lineares em Relatividade Geral e  
Matéria Escura em Galáxias**

Monografia apresentada ao Departamento  
de Física/CCE, Universidade Federal do  
Espírito Santo, como parte dos requisitos  
para obtenção do título de Bacharel em  
Física.

Vitória, 23 de abril de 2013

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Davi C. Rodrigues(UFES)

---

Prof. Dr. Ilya L. Shapiro(UFJF)

---

Prof. Dr. Júlio C. Fabris(UFES)

---

Prof. Dr. Oliver F. Piattella(UFES)

Vitória  
2013

Aos meus pais Luiza e Mário, e irmão Mário Augusto.

A minha esposa Ediane.

## Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida e pelo sustento durante estes quatro anos. À minha família (pai, mãe e irmão) que sempre me apoiaram em minhas escolhas e decisões. À minha esposa que sempre prestou solidariedade e compreensão nos momentos difíceis nestes quatro anos. Ao Professor Davi pela oportunidade que me concedeu de estar trabalhando e aprendendo acerca deste trabalho, pelos momentos em que se dispôs a me atender solucionando minhas dúvidas e me orientando para uma melhor compreensão do tema deste trabalho. Ao Professor Oliver que também sempre esteve disposto a sanar dúvidas e comentários acerca da proposta estudada por mim neste trabalho. Aos meus amigos de UFES: Hamilton, Rodrigo, Ivan, Ewerton, Alisson, Daniel, Gustavo que sempre me ajudaram nos momentos difíceis de faculdade.

“A mente que se abre a uma nova idéia jamais voltará ao seu tamanho original”

(Albert Einstein)

## Resumo

A dinâmica de galáxias é normalmente tratada no regime de gravitação Newtoniana, pois efeitos não lineares de Relatividade Geral são considerados desprezíveis nesse contexto. Entretanto, algumas propostas recentes têm questionado esse procedimento. Nesta monografia revisamos e avaliamos criticamente uma proposta que sugere que esses efeitos não lineares poderiam ser fortes o suficiente para eliminar a necessidade de matéria escura em galáxias. Além de reforçarmos certas críticas sobre a base teórica desta abordagem, mostramos que fenomenologicamente os procedimentos adotados não são robustos e podem levar a resultados bem diferentes da observação. Por outro lado, enfatizamos que o entendimento atual de dinâmica de galáxias no contexto de Relatividade Geral ainda não é sólido, assim uma precisa avaliação de suas correções nesse contexto necessita de mais atenção.

## Abstract

The dynamics of galaxies is usually evaluated within Newtonian gravity, since General Relativity non linear effects are assumed negligible in this context. Nevertheless, some recent proposals pose doubts in this procedure. In this monograph we review and critically evaluate a proposal that suggest that these non linear effects could be strong enough to eliminate the dark matter necessity in galaxies. Beyond reinforcing criticisms on the theoretical basis, we show that the adopted procedures are not phenomenologically robust and may lead to results that significantly differ from the observational data. On the other hand, we emphasize that the current understanding of the galaxy dynamics in the General Relativity context is not yet robust, hence a precise evaluation of its corrections is still in need for additional attention.



# Lista de Figuras

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 3.1 | Curvas de rotação . . . . .   | 18 |
| 3.2 | Efeito de lentes gravitacionais, em azul múltiplas imagens de uma galáxia distante. . . . .   | 18 |
| 3.3 | Efeito de lentes gravitacionais: Cruz de Einstein. . . . .  | 19 |
| 3.4 | Representação artística da Via Láctea. . . . .  | 20 |
| 4.1 | Curva de rotação para Via Láctea em unidades de km/s (velocidade de rotação) por kpc (raio da galáxia) . . . . .  | 27 |
| 4.2 | Densidade no limite em que $z$ vai a zero da Via Láctea segundo a abordagem de Cooperstock e Tieu. Resultado reproduzido neste trabalho, e originalmente publicado em (Cooperstock et al 2006). . . . .   | 27 |
| 5.1 | Densidade $z = 0$ da Via Láctea em unidades de $M_{solar}/kpc^3$ , sendo $M_{solar} = 1,9891 \times 10^{30}kg$ e $kpc = 3.08568 \times 10^{16}km$ . A curva azul considera a soma da densidade estelar com a do meio interstelar, a curva lilaz despreza o gás. Em ambos os casos, o bojo está sendo desconsiderado (o que aumentaria a densidade próximo ao centro). . . . . | 29 |
| 5.2 | Dados da curva de rotação da Via Láctea segundo as observações mencionadas em [5] e [6] em unidades de km/s por kpc. . . . .  | 30 |
| 5.3 | Esta figura mostra que os procedimentos de CT não são robustos. . . . .   | 30 |

- 
- 5.4 Curva de rotação da Via Láctea em km/s por kpc. Os pontos são os dados observacionais obtidos em [5] e [6] e a curva foi obtida a partir da interpolação, usando funções de Bessel, em acordo com a metodologia da proposta CT. . . . . 31
- 5.5 Densidade da matéria usual (i.e., bariônica) como prevista pelo modelo CT. 31

## Lista de Tabelas

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 4.1 | Coeficientes da curva de rotação fitados para Via Láctea com base nos dados de CT . . . . . | 26 |
|-----|---|----|

# Sumário

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                       | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Relatividade Geral</b>               | <b>4</b>  |
| 2.1      | Introdução . . . . .                    | 4         |
| 2.2      | Princípio de Equivalência . . . . .     | 5         |
| 2.3      | Princípio Variacional . . . . .         | 5         |
| 2.4      | Geodésica . . . . .                     | 7         |
| 2.5      | Equações de Einstein . . . . .          | 9         |
| 2.6      | Limite Newtoniano . . . . .             | 10        |
| <b>3</b> | <b>Matéria Escura</b>                   | <b>16</b> |
| <b>4</b> | <b>A proposta de Cooperstock e Tieu</b> | <b>21</b> |
| <b>5</b> | <b>Resultados e Discussões</b>          | <b>28</b> |
| <b>6</b> | <b>Conclusão</b>                        | <b>32</b> |

# Capítulo 1

## Introdução

Na década de trinta, matéria escura era uma vaga hipótese com duvidosa base observacional em aglomerados de galáxias [1]. Com o passar dos anos, as observações ficaram mais precisas e atualmente apontam para a existência de algo exótico, interpretado como matéria escura, que aparece nas escalas de galáxias, aglomerados de galáxias e do universo observável como um todo [2]. Há ainda muitos detalhes por saber sobre matéria escura (os quais influenciam diretamente sua medição e criação aqui na Terra, com boas chances de ocorrer nos próximos anos), mas já sabemos muito do que ela não pode ser. O atual modelo padrão de matéria escura (CDM, “cold dark matter”), a despeito de seu sucesso em várias escalas, tem demonstrado problemas sistemáticos para explicar as galáxias observadas e sua formação, ver por exemplo [3]. Não há atualmente resposta ao problema, o que talvez seja devido às observações atuais serem mais precisas que a validade do modelo padrão de matéria escura.

As primeiras observações que indicavam a presença de matéria escura, isto a partir da década de 30, assumiam gravitação Newtoniana. As velocidades típicas dos constituintes de uma galáxia (estrelas e gás) são no máximo da ordem de centenas de quilômetros por segundo, enquanto o potencial Newtoniano médio estimado para a galáxia é muito menor que o quadrado da velocidade da luz ( $\frac{\Phi_N}{c^2} \ll 1$ ), isto sugere que os efeitos não lineares de Relatividade Geral sejam desprezíveis, e que portanto o emprego de gravitação Newtoniana esteja bem fundamentada.

Cooperstock e Tieu [4] apresentaram críticas à conclusão acima, e construíram uma solução das equações de Einstein, com as simetrias de uma galáxia de disco, cuja cinemática de galáxias difere significativamente da cinemática Newtoniana. Eles ainda especularam sobre a possibilidade dessas diferenças entre a cinemática de Relatividade Geral e a Newtoniana responderem pela totalidade, ou grande parte, dos efeitos gravitacionais comumente atribuídos à matéria escura.

O objetivo deste trabalho, por fim, é rever a abordagem de Cooperstock e Tieu reproduzindo seus resultados para a Via Láctea e analisar a abordagem para dados observacionais da Via Láctea mais recentes [5] e [6] comparando com modelos de matéria bariônica (usual) encontrados em [7] e [8]. O trabalho é dividido em 4 capítulos. O primeiro é dedicado a uma revisão sucinta sobre Relatividade Geral abordando o Princípio de Equivalência, Princípio Variacional, Geodésicas e Equações de Einstein. O segundo abrange, de forma sucinta, aspectos sobre matéria escura: histórico, indicações de sua existência e perfis que modelam sua densidade em uma determinada galáxia. O terceiro trata da abordagem de Cooperstock e Tieu, mostra a análise de suas motivações, equações e abordam a validade de sua proposta frente a dados observacionais recentes para a Via Láctea em particular. Por fim, o quarto capítulo aborda os resultados e discussões acerca da abordagem proposta neste trabalho.

## Capítulo 2

# Relatividade Geral

### 2.1 Introdução

Em 1905, um jovem funcionário do escritório de patentes de Berna, na Suíça publicou um artigo [15] que revolucionou a física daqueles dias, esse jovem chamava-se Albert Einstein. Nesse artigo, Einstein tratava da aplicabilidade das leis da eletrodinâmica clássica, bem como sua interpretação diante de referenciais inerciais que culminaram na formulação dos postulados da Teoria da Relatividade Especial de Einstein, que são: o princípio de relatividade e a velocidade universal da luz. Dez anos após a publicação da teoria da Relatividade Especial, Einstein publicou a generalização desta teoria: a Teoria da Relatividade Geral.

A teoria da Relatividade Geral de Einstein baseia-se na interpretação da interação gravitacional como consequência da modificação da geometria do espaço-tempo através de matéria ou energia. A força resultante, proposta pela teoria Newtoniana, aplicada sobre uma partícula teste é substituída pelo caminho da partícula (geodésica) em uma geometria modificada. A Relatividade Geral pode também ser vista como uma generalização da Teoria da Gravitação proposta por Newton, reforçada com os conceitos de espaço-tempo já apresentados na Teoria da Relatividade Especial.

## 2.2 Princípio de Equivalência

Um dos princípios que mais norteiam a Teoria da Relatividade Geral é o Princípio de Equivalência. Este, sob a luz da Mecânica Clássica, diz que o movimento de uma partícula teste em um campo gravitacional é independente de sua massa e de sua composição. Este princípio foi verificado por Galileu, ao perceber que lançando corpos com massas diferentes do alto da torre de Pisa, ambos tocavam no chão ao mesmo tempo.

Na Relatividade Geral o Princípio de Equivalência proposto por Einstein pode ser entendido através do seguinte experimento: Imaginemos um elevador em queda livre, este por sua vez está sujeito à ação de um campo gravitacional, se o passageiro deste elevador soltar uma pequena bolinha, ele a verá flutuando, ou seja, em repouso. Agora imaginemos este mesmo passageiro a bordo de uma nave que está fora do alcance de campos gravitacionais, se ele soltar esta mesma bolinha ele a verá flutuando, ou seja, em repouso também. Logo para o passageiro é equivalente estar imerso num campo gravitacional (queda livre) ou não, podemos concluir que o passageiro não saberia dizer se está ou não sob a influência de um campo gravitacional apenas olhando a bolinha. Agora, quem observa o passageiro dentro do elevador ou da nave, de um referencial fixo ou em repouso, saberá dizer se ele está sujeito à ação de um campo gravitacional ou não.

Então vemos que a gravidade depende do “ponto de vista”, ela então deixa de ser, sobre esta perspectiva, uma interação fundamental da natureza e passa a ser apenas um efeito que está intimamente ligado ao referencial adotado.

## 2.3 Princípio Variacional

Para entendermos melhor o conceito de geodésica necessitamos rever o Princípio Variacional. O problema principal deste princípio é determinar  $x^i(s)$ , com  $i = 1, \dots, n$  tal que

$$S = \int_1^2 L \left( x^i, \frac{dx^i}{ds} \right) ds \quad (2.1)$$

seja um mínimo, 1 e 2 são os pontos extremos onde  $\delta x^i(1) = \delta x^i(2) = 0$ . Além disso as variáveis:  $s$ ,  $\frac{dx^i}{ds}$  e  $x^i$  são vistas como variáveis independentes,  $s$  é o parâmetro no qual a



geodésica será descrita. O princípio variacional nos diz que

$$\delta S = 0 \quad (2.2)$$

$$\delta \int_1^2 L ds = \int_1^2 \delta L ds = 0, \quad (2.3)$$

ora:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^i}{ds}\right)} \delta \left(\frac{dx^i}{ds}\right) + \frac{\partial L}{\partial x^i} \delta x^i. \quad (2.4)$$

Vale ressaltar que estamos usando a convenção de Einstein para soma,

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} \delta x^i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \delta x^i. \quad (2.5)$$

Mas

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^i}{ds}\right)} \delta x^i \right] = \frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial}{\partial \left(\frac{dx^i}{ds}\right)} \right] \delta x^i + \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^i}{ds}\right)} \frac{d(\delta x^i)}{ds}. \quad (2.6)$$

Substituindo (2.6) em (2.4) e posteriormente em (2.3), temos

$$\int_1^2 \delta L ds = \int_1^2 \frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^i}{ds}\right)} \delta x^i \right] ds - \int_1^2 \frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^i}{ds}\right)} \right] \delta x^i ds + \int_1^2 \frac{\partial L}{\partial x^i} \delta x^i ds = 0. \quad (2.7)$$

A primeira integral em (2.7) é zero, pois  $\delta x^i(1) = \delta x^i(2) = 0$ , ficando então

$$\int_1^2 \left\{ \frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^i}{ds}\right)} \right] - \frac{\partial L}{\partial x^i} \right\} \delta x^i ds = 0. \quad (2.8)$$

O que resulta em

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^i}{ds}\right)} \right] - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0. \quad (2.9)$$

Essa equação é conhecida como equação de Euler-Lagrange. Ela determina como deve ser  $L$  para que  $S$  seja um extremo.

## 2.4 Geodésica

No espaço Euclidiano a translação de um vetor por um determinado caminho não afeta suas características, ou seja, módulo, direção e sentido. Agora imaginemos a superfície de uma esfera e tenhamos um vetor tangente à ela na linha do equador, se escolhermos um caminho, um dos meridianos por exemplo, no qual ao trasladarmos este vetor pela superfície esférica este esteja sempre tangente à ela, veremos que quando chegarmos ao pólo norte desta esfera por exemplo, o vetor estará com sua direção e sentido mudados.

A geometria da esfera citada é uma geometria de Espaços Curvos, esta geometria está presente a todo o momento em Relatividade Geral. Para efetuarmos qualquer operação entre vetores neste espaço precisamos trasladá-los para bem próximo um do outro, assim como fazemos no espaço Euclidiano (soma, subtração, produto escalar e produto vetorial). O ente que translada esses vetores é chamado conexão afim  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ .

As geodésicas são curvas parametrizadas em uma determinada superfície na qual os vetores tangentes a ela, em um determinado ponto, também são paralelos a ela. Por exemplo: o espaço Euclidiano possui curvatura nula. A trajetória na qual um vetor (representado neste espaço) segue sempre em paralelo e tangente ao longo dela, é a reta. Logo a reta é uma geodésica para o espaço Euclidiano.

O conceito de geodésica pode ser explorado também como sendo a linha que representa o caminho mais curto entre dois pontos quaisquer quando o caminho está restrito a uma superfície específica.

No espaço-tempo temos que o elemento de linha é dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} . \quad (2.10)$$

O comprimento de uma curva no espaço tempo é então dado por

$$I = \int_1^2 ds , \quad (2.11)$$

que por sua vez pode ser escrita como

$$I = \int_1^2 \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} ds . \quad (2.12)$$

Como queremos encontrar a geodésica e sabemos que está relacionada ao caminho mínimo entre dois pontos devemos recorrer a (2.9) , logo

$$L = \left( g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (2.13)$$

Então

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} \left( g_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} . \quad (2.14)$$

Por outro lado

$$\frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dx^\mu}{ds} \right)} = \frac{1}{2} \left( g_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( g_{\mu\sigma} \frac{dx^\sigma}{ds} + g_{\rho\mu} \frac{dx^\rho}{ds} \right) = g_{\mu\alpha} \frac{dx^\alpha}{ds} , \quad (2.15)$$

sabendo que  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ . E ainda

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{dx^\mu}{ds} \right)} \right] = g_{\mu\alpha} \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} . \quad (2.16)$$

Substituindo em (2.9) temos,

$$\begin{aligned} 0 &= g_{\mu\alpha} \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\alpha}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} \\ &= g_{\mu\alpha} \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{ds} \frac{dx^\alpha}{ds} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \\ &= g_{\mu\alpha} \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} . \end{aligned} \quad (2.17)$$

Mas temos ainda que

$$2 \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = \left( \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} \right) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} . \quad (2.18)$$

Então em (2.17) temos

$$\begin{aligned} 0 &= g_{\mu\alpha} \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \\ &= g^{\mu\rho} g_{\mu\alpha} \frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left( \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \end{aligned}$$

$$= \frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}. \quad (2.19)$$

Esta é a equação da geodésica

$$\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0, \quad (2.20)$$

com

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\mu} \left( \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \right). \quad (2.21)$$

## 2.5 Equações de Einstein

A Teoria da Relatividade Geral é matematicamente descrita através da geometria Riemanniana, sua equação principal é

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

em que  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci e  $R$  é o escalar de Ricci e  $g_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço-tempo e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento. O tensor de Ricci, por sua vez é uma contração do tensor de Riemann,

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}, \quad (2.23)$$

e o escalar de Ricci é uma contração do tensor de Ricci dada por

$$R = R^\alpha_\alpha = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta}. \quad (2.24)$$

A equação de Einstein pode ser obtida através do princípio variacional, em que ao invés de uma lagrangiana teremos uma densidade de lagrangiana, pelo fato de estarmos aplicando este princípio a campos  $g_{\mu\nu}$ , mas estas densidades de lagrangianas são comumente chamadas de lagrangianas somente. No caso da equação de Einstein temos que a lagrangiana é dada por  $L = R$ , em que  $R$  é o escalar de Ricci.

A equação de Einstein relaciona geometria com matéria ou energia, o lado esquerdo da equação (2.22), em geral, está relacionado à geometria e o direito, por sua vez, está relacionado, em geral, à matéria ou energia.

## 2.6 Limite Newtoniano

A equação (2.20) pode ser escrita em função de outros parâmetros além da distância infinitesimal  $ds$  ao longo da geodésica. Supondo então um parâmetro  $\sigma$  no qual descreveremos a nossa geodésica, temos então que

$$\frac{dx^\rho}{ds} = \frac{dx^\rho}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds}. \quad (2.25)$$

E ainda segue que

$$\frac{d^2x^\rho}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left( \frac{dx^\rho}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} \right) = \frac{dx^\rho}{d\sigma} \frac{d^2\sigma}{ds^2} + \frac{d\sigma}{ds} \frac{d}{ds} \left( \frac{dx^\rho}{d\sigma} \right) \quad (2.26)$$

$$\frac{d^2x^\rho}{ds^2} = \frac{dx^\rho}{d\sigma} \frac{d^2\sigma}{ds^2} + \frac{d\sigma}{ds} \frac{d\sigma}{ds} \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{dx^\rho}{d\sigma} \right) = \frac{dx^\rho}{d\sigma} \frac{d^2\sigma}{ds^2} + \frac{d^2x^\rho}{d\sigma^2} \left( \frac{d\sigma}{ds} \right)^2. \quad (2.27)$$

Substituindo em (2.20) temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dx^\rho}{d\sigma} \frac{d^2\sigma}{ds^2} + \frac{d^2x^\rho}{d\sigma^2} \left( \frac{d\sigma}{ds} \right)^2 + \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \left( \frac{d\sigma}{ds} \right)^2 \\ &= \left[ \frac{d^2x^\rho}{d\sigma^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} \right] \left( \frac{d\sigma}{ds} \right)^2 + \frac{dx^\rho}{d\sigma} \frac{d^2\sigma}{ds^2} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\frac{d^2x^\rho}{d\sigma^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} = - \frac{\frac{d^2\sigma}{ds^2}}{\left( \frac{d\sigma}{ds} \right)^2} \frac{dx^\rho}{d\sigma}, \quad (2.29)$$

usando (2.20) temos

$$- \frac{\frac{d^2\sigma}{ds^2}}{\left( \frac{d\sigma}{ds} \right)^2} \frac{dx^\rho}{d\sigma} = 0, \quad (2.30)$$

logo

$$\frac{d^2\sigma}{ds^2} = 0 \quad (2.31)$$

$$\sigma = as + b, \quad (2.32)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes arbitrárias e reais.

O parâmetro  $\sigma$  é conhecido como parâmetro afim. A equação (2.32) mostra que qualquer parâmetro afim  $\sigma$  está relacionado com o parâmetro de distância  $s$  por uma transformação linear.

Como mencionamos a Relatividade Geral é uma extensão da teoria da gravitação de Newton, portanto deve existir um limite Newtoniano para Relatividade Geral, em que as equações de Einstein se reduzam às equações de Newton sob circunstâncias específicas.

Consideremos então o caso em que uma partícula se move lentamente em um campo gravitacional fraco, ou seja,  $\frac{\Phi_N}{c^2} \ll 1$ , onde  $\Phi_N$  é o potencial newtoniano e  $c$  é a velocidade da luz. Como deduzimos anteriormente, um parâmetro afim está relacionado ao parâmetro de distância por uma transformação linear. Seja portanto o parâmetro afim  $\tau$ , conhecido como tempo próprio da partícula. A equação da geodésica torna-se

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (2.33)$$

se a partícula move-se lentamente podemos desprezar os termos  $\frac{d\vec{x}}{d\tau}$  em relação aos termos de  $\frac{dt}{d\tau}$  e a equação (2.33) fica

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\lambda \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0, \quad (2.34)$$

lembrando que  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x})$ , considerando  $c = 1$ .

Da relação entre  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  e  $g_{\mu\nu}$  dada por (2.21) e considerando o campo estacionário, temos que todas as derivadas temporais de  $g_{\mu\nu}$  vão desaparecer, restando apenas

$$\Gamma_{00}^\lambda = -\frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma}. \quad (2.35)$$

Como supomos, o campo gravitacional é fraco, portanto podemos entendê-lo como uma pequena perturbação em torno do espaço-tempo de Minkowski

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (2.36)$$

com  $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$  e  $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  é o tensor métrico do espaço de Minkowski

Considerando apenas primeira ordem em  $h_{\alpha\beta}$  temos

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}, \quad (2.37)$$

pois

$$g^{\alpha\mu} g_{\mu\alpha} = (\eta^{\alpha\mu} - h^{\alpha\mu})(\eta_{\mu\beta} + h_{\mu\beta}) \quad (2.38)$$

$$= \eta^{\alpha\mu} \eta_{\mu\beta} + \eta^{\alpha\mu} h_{\mu\beta} - h^{\alpha\mu} \eta_{\mu\beta} \quad (2.39)$$

$$= \eta^{\alpha\mu} \eta_{\mu\beta} + g^{\alpha\rho} g^{\mu\sigma} \eta_{\rho\sigma} h_{\mu\beta} - g^{\alpha\rho} g^{\mu\sigma} h_{\rho\sigma} \eta_{\mu\beta} \quad (2.40)$$

$$= \eta^{\alpha\mu} \eta_{\mu\beta} + g^{\alpha\rho} g^{\mu\sigma} (\eta_{\rho\sigma} h_{\mu\beta} - h_{\rho\sigma} \eta_{\mu\beta}) \quad (2.41)$$

$$= \eta^{\alpha\mu} \eta_{\mu\beta} \quad (2.42)$$

$$= \delta_{\beta}^{\alpha}$$

$$(2.43)$$

Então (2.35) fica

$$\Gamma_{00}^{\alpha} = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\beta}}, \quad (2.44)$$

uma vez que as derivadas no tempo e no espaço de  $\eta_{\mu\nu}$  são zero.

Substituindo (2.44) em (2.34) temos

$$\frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 \vec{\nabla} h_{00}, \quad (2.45)$$

e

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0. \quad (2.46)$$

Multiplicando a equação (2.45) por  $\left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2$  temos

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2} \vec{\nabla} h_{00}, \quad (2.47)$$

da gravitação Newtoniana temos,

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}\phi. \quad (2.48)$$

Comparando as duas equações temos que

$$h_{00} = 2\phi + C, \quad (2.49)$$

mas temos que o potencial deve anular-se no infinito, bem como  $g_{\alpha\beta}$  deve tender a Minkowski para grandes distâncias, ou seja,  $h_{00}$  deve desaparecer no infinito, então  $C = 0$  e  $h_{00} = 2\phi$ , retornando para (2.36) temos

$$g_{00} = 1 + 2\phi. \quad (2.50)$$

O potencial que mencionamos em (2.48) é um potencial efetivo. Para que o limite Newtoniano seja completo devemos verificar se  $\phi$  é equivalente ao potencial Newtoniano. Antes de prosseguirmos, devemos entender melhor do que se trata a definição de potencial Newtoniano. Potencial Newtoniano pode ser definido como um campo escalar que satisfaz a seguinte equação

$$\nabla^2\Phi_N = 4\pi G\rho, \quad (2.51)$$

onde  $\Phi_N$  é o potencial Newtoniano e  $\rho$  é a distribuição de matéria associada ao potencial Newtoniano e  $G$  é a constante gravitacional.

Para mostrar a equivalência entre o potencial efetivo e o potencial Newtoniano lançamos mão das equações de Einstein (2.22), na qual, por simplicidade, faremos  $c = 1$  e  $\kappa = 8\pi G$ . Portanto temos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.52)$$

aplicando  $g^{\mu\nu}$  dos dois lados de (2.52) a fim de obter o escalar de Ricci em função do traço do tensor energia-momento  $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$  ficamos com

$$R = -\kappa T. \quad (2.53)$$

Inserindo (2.53) em (2.52) obtemos

$$R_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) \quad (2.54)$$



e

$$R_{00} = \kappa(T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00}) \approx \kappa(T_{00} - \frac{T}{2}) \quad (2.55)$$

considerando  $g_{00} \approx 1$ .

Ora considerando o tensor energia-momento de um fluido sem pressão  $T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu$  temos  $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \rho g^{\mu\nu}U_\mu U_\nu = \rho U^\nu U_\nu = \rho$ , pois  $U^\mu U_\mu = 1$ .

E ainda  $T_{\mu\nu} = \rho g_{\mu\nu}U^\nu U_\nu$ , o que dá  $T_{00} = \rho$ . Uma vez que estamos considerando velocidades muito baixas e  $g_{00} \approx 1$ .

Substituindo em (2.55) temos

$$R_{00} = \kappa \frac{\rho}{2}. \quad (2.56)$$

Ora o tensor de Ricci é uma contração do tensor de Riemman que por sua vez é dado por

$$R_{\mu\alpha\nu}^\rho = \frac{\partial \Gamma_{\nu\mu}^\rho}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\mu}^\rho}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda. \quad (2.57)$$

Temos então que  $R_{00} = R_{0\rho 0}^\rho = \frac{\partial \Gamma_{00}^\rho}{\partial x^\rho} = \frac{\partial \Gamma_{00}^i}{\partial x^i}$  uma vez que temos apenas 1ª ordem em  $h_{\mu\nu}$  e as derivadas no tempo são desprezadas pois  $g_{\mu\nu}$  é estacionário. Mas temos que  $\Gamma_{00}^i$  é dado por (2.44) então

$$R_{00} = \frac{1}{2} \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} h_{00}. \quad (2.58)$$

Substituindo (2.58) em (2.56) temos

$$\frac{1}{2} \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} h_{00} = \kappa \frac{\rho}{2}, \quad (2.59)$$

mas  $h_{00} = 2\phi$  então temos

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (2.60)$$

Logo verificamos que  $\phi$  é o potencial Newtoniano.

O que os textos tradicionais envolvendo limite Newtoniano [12] abordam é um cenário em que a métrica  $g_{\mu\nu}$  é uma pequena perturbação  $h_{\mu\nu}$  em torno de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ , em que se considerarmos apenas efeitos de 1ª ordem, velocidades muito baixas e regime de “campo fraco” designado por  $\frac{\Phi_N}{c^2} \ll 1$ , obteremos (2.50).

Porém vale analisar que estes mesmos textos validam o regime de “campo fraco” como (2.36), em coordenadas cartesianas. Analisemos então a equação da geodésica (2.20)

$$\frac{dx^\mu}{d\tau^2} + 2\Gamma_{0i}^\mu \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^i}{d\tau} + \Gamma_{00}^\mu \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \Gamma_{ij}^\mu \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = 0. \quad (2.61)$$

E de fato, assumindo o limite de campo fraco, a partícula se deslocando lentamente e realizando uma pequena perturbação  $h_{\mu\nu}$  na métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ , com aproximações de 1ª ordem, temos que os símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^{\mu} \left(\frac{dx^i}{d\tau}\right) \left(\frac{dx^j}{d\tau}\right)$  serão desprezados. Porém se considerarmos  $h_{0i}$  grande suficiente em relação a  $h_{00}$  podemos obter que o termo  $\Gamma_{0i}^{\mu} \left(\frac{dt}{d\tau}\right) \left(\frac{dx^i}{d\tau}\right)$  não seja desprezível na equação da geodésica e conseqüentemente na determinação da força. Mas considerando as velocidades suficientemente baixas mesmo uma perturbação  $h_{\mu\nu}$  não diagonal em Minkowski não afetará a equação da geodésica.

---

## Capítulo 3

# Matéria Escura

O termo matéria escura se refere a certa forma de matéria que é até hoje somente inferida indiretamente por meio das observações de estruturas como galáxias e aglomerados de galáxias. Sua distribuição em diversas estruturas segue um certo padrão, e este é claramente diferente da distribuição da matéria usual (bariônica).

Na década de trinta, matéria escura era uma vaga hipótese com duvidosa base observacional em aglomerados de galáxia. Os primeiros estudos abordavam o movimento orbital dos aglomerados de galáxia: Coma e Virgem. Tais estudos mostraram que as velocidades das galáxias observadas eram da ordem de dez a cem vezes maiores do que se esperava teoricamente. A massa do aglomerado pode ser obtida através do teorema do Virial, considerando a hipótese de que dentro do aglomerado, as galáxias tenham atingido um ponto de equilíbrio. O teorema do Virial [13] no diz que,

$$T = -\frac{1}{2}U, \quad (3.1)$$

onde  $T$  é a energia cinética média interna ao aglomerado e  $U$  a energia potencial média. Mas temos que,

$$T = \frac{1}{2}MV^2 \quad (3.2)$$

e ainda,

$$U = -\frac{GM^2}{r}, \quad (3.3)$$

substituindo em (3.1) temos,

$$M(r) = \frac{rV^2}{G}. \quad (3.4)$$

A relação acima nos permite calcular a massa do aglomerado  $M(r)$ , na qual  $r$  corresponde ao raio médio no qual se mede as velocidades das galáxias e  $V$  é a velocidade média das galáxias.

Anos mais tarde, na década de 70, a astrônoma Vera Rubin [14] e seus colaboradores mostraram evidências de matéria escura ao medirem *curvas de rotação* de galáxias espirais. O que são curvas de rotação de galáxias?

*Curvas de rotação* são perfis de velocidades de componentes de galáxias, como estrelas e gás, que orbitam em torno do centro da galáxia. Assim como os planetas, gás e estrelas em uma galáxia obedecem às leis de Kepler e portanto podem ser descritas matematicamente pela gravitação Newtoniana. Podemos então considerar que a força gravitacional entre um componente da galáxia de massa  $m$  (estrela ou gás) e a massa  $M$  da galáxia interna ao raio  $r$ , é a força centrípeta, portanto temos,

$$\frac{mV^2}{r} = \frac{GmM}{r^2} \quad (3.5)$$

$$M(r) = \frac{rV^2}{G}, \quad (3.6)$$

o que coincide com (3.4), e finalmente

$$V(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (3.7)$$

A curva de rotação prevista pelo modelo Newtoniano é uma função que decai com  $r^{-\frac{1}{2}}$  Figura 3.1. Por outro lado, as curvas de rotação observadas por Rubin e seus colaboradores apresentaram um comportamento totalmente diferente do previsto à medida que se afastavam do centro da galáxia Figura 3.1

Uma das explicações para que a curva de rotação tenha este comportamento é de que existe matéria na galáxia que não vemos - matéria escura.

Outra evidência da existência de matéria escura, que estaremos apenas citando, são as *lentes gravitacionais*. Estas são uma ferramenta que “pesam” a matéria escura. As observações de lentes gravitacionais necessitam de alta qualidade, o que torna recente a

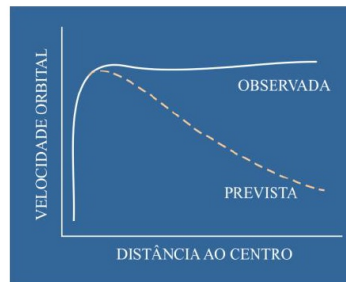


Figura 3.1: Curvas de rotação

utilização desta ferramenta. Quando a luz de uma fonte luminosa bem distante passa por uma concentração de matéria, a trajetória da luz se curva fazendo esta fonte parecer estar em outro lugar, além de produzir efeitos de distorção na forma da galáxia distante (Figura 3.2).



Figura 3.2: Efeito de lentes gravitacionais, em azul múltiplas imagens de uma galáxia distante.

Alguns efeitos de lentes são fortes, produzindo efeitos notáveis como por exemplo a “cruz de Einstein” Figura 3.3

Em particular, abordaremos com um pouco mais de detalhes a presença da matéria escura em nossa galáxia, a *Via Láctea* (Figura 3.4).

A identificação dos componentes de nossa galáxia torna-se relativamente fácil, devido ao fato de estarmos nela, em contrapartida a aquisição de dados como, velocidade orbital de estrelas e gás, por exemplo apresentam uma margem de erro significativa devido ao mesmo motivo: estarmos inseridos nela. Várias correções são feitas aos dados obtidos em

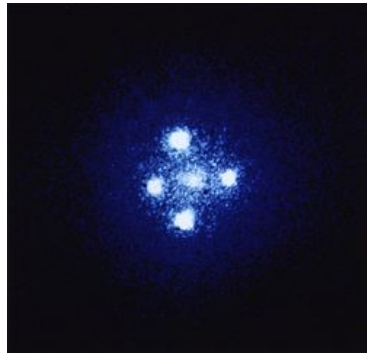


Figura 3.3: Efeito de lentes gravitacionais: Cruz de Einstein.

virtude de nossa inserção na Via Láctea.

A Via Láctea possui 4 componentes: o bojo, o halo escuro, o disco estelar e o meio interestelar.

Todos esses componentes possuem suas respectivas distribuições de densidade de matéria  $\rho(R, z)$  (sendo  $R$  e  $z$  as coordenadas polares) medidas através de observação direta (razão entre massa e luminosidade, fotometria, etc) ou indireta (aspectos dinâmicos, como velocidade circular). O halo escuro, em particular, apresenta total influência de argumentos dinâmicos em sua modelagem. Segundo [7] a densidade de matéria escura é dada por,

$$\rho(R, z) = \rho_{h0} \left( \frac{m}{a_h} \right)^{-\alpha_h} \left( 1 + \frac{m}{a_h} \right)^{\alpha_h - \beta_h}, \quad (3.8)$$

onde  $m = \sqrt{R^2 + \frac{z^2}{q_h^2}}$ . Todos os cinco parâmetros  $\rho_{h0}$ ,  $a_h$ ,  $\alpha_h$ ,  $\beta_h$  e  $q_h$  podem ser apenas inferidos por argumentos dinâmicos.

Outra modelagem para a densidade de matéria escura em galáxias vêm das simulações. Este perfil é conhecido como Navarro-Frenk-White e é dado por

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\frac{r}{R_s} \left( 1 + \frac{r}{R_s} \right)^2}. \quad (3.9)$$

sendo  $\rho_0$  e  $R_s$  constantes determinadas por argumentos dinâmicos da galáxia em questão. Vemos que as distribuições de matéria escura inferidas por (3.8) e por (3.9) são bem distintas. Temos que (3.9) assume uma distribuição esfericamente simétrica para o halo de matéria escura, já a distribuição de (3.8) possui uma simetria elíptica ou oblata para o halo de matéria escura, o que necessita de mais parâmetros para ser modelado.



Figura 3.4: Representação artística da Via Láctea.

## Capítulo 4

# A proposta de Cooperstock e Tieu

Vimos anteriormente que as observações astrofísicas levaram, assumindo gravitação Newtoniana, a existência de matéria escura na tentativa de explicar o comportamento das curvas de rotação de galáxias. Por outro lado, temos que a Relatividade Geral é a teoria mais completa em gravitação hoje, e portanto pode nos dar mais informações acerca deste fenômeno. Porém vimos que as velocidades dos constituintes de uma galáxia (estrelas e gás) são baixas, além do potencial gravitacional ser muito menor que o quadrado da velocidade da luz  $\frac{\Phi_N}{c^2} \ll 1$ , ou seja, um regime de “campo fraco”. Portanto dentro deste regime e com estas velocidades, num cenário de Relatividade Geral, o Limite Newtoniano existe e portanto gravitação Newtoniana é uma das alternativas para descrever este sistema físico. Cooperstock e Tieu [4], ou simplesmente CT, apresentaram estas críticas à abordagem descrita acima, enfatizando que galáxias são sistemas ligados gravitacionalmente cujas massas relevantes não se distribuem como pontos no sistema solar, mas sim como um fluido. Como as equações de Einstein (2.22) não são lineares, sua contribuição, por menor que seja em consideração preliminar, não deve ser descartada. Ou seja, CT, enfatiza que mesmo num cenário de Relatividade Geral, regime de baixas velocidades, campo fraco temos, pela não linearidade das equações de Einstein, que contribuições não lineares podem vir a ser relevantes e ainda que estas contribuições são reponsáveis por efeitos associados, comumente, à matéria escura.

A abordagem de CT parte inicialmente de uma solução particular de Relatividade



Geral a partir da seguinte métrica com simetria azimutal,

$$ds^2 = -e^{\nu-\varphi} (udz^2 + dr^2) - r^2 e^{-\varphi} d\phi^2 + e^\varphi (cdt - Nd\phi)^2, \quad (4.1)$$

uma métrica não-diagonal sendo  $u$ ,  $\nu$ ,  $\varphi$  e  $N$  funções das coordenadas polares  $r, z$ . O campo  $N$  mostraremos que está diretamente associado à rotação da galáxia, sendo zero o caso em que ela não gira. É notório que somente quando  $N = 0$  o elemento de linha é invariante por inversão temporal.

A galáxia, em particular, é a do tipo disco, logo possui simetria azimutal eliminando assim sua dependência em  $\phi$ .

Os autores então propõem uma transformação puramente local

$$\bar{\phi} = \phi + \omega(r, z)t, \quad (4.2)$$

a fim de tornar a métrica localmente diagonalizada. Então a partir de (4.2) temos

$$d\bar{\phi} = d\phi + t(\omega_r dr + \omega_z dz) + \omega dt \quad (4.3)$$

isolando  $d\phi$  elevando ao quadrado, substituindo em (4.1) e agrupando os termos semelhantes temos

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left( N^2 e^\varphi \omega^2 - r^2 e^{-\varphi} \omega^2 + 2\omega c e^\varphi N + c^2 e^\varphi \right) dt^2 - \left( 2N^2 e^\varphi \omega + 2r^2 e^{-\varphi} \omega + 2e^\varphi Nc \right) d\bar{\phi} dt - \\ & - \left( e^{-\nu-\varphi} - N^2 t^2 \omega_r^2 + r^2 e^{-\varphi} \omega_r^2 \right) dr^2 - \left( r^2 e^{-\varphi} - N^2 e^\varphi \right) d\bar{\phi}^2 + \\ & + \left( 2\omega t \omega_r N^2 e^\varphi + 2\omega t \omega_r r^2 e^{-\varphi} + 2Nct\omega_r e^\varphi \right) dr dt \\ & + \left( 2\omega t \omega_z N^2 e^\varphi + 2\omega t \omega_z r^2 e^{-\varphi} + 2Nct\omega_z e^\varphi \right) dz dt \\ & - \left( 2N^2 e^\varphi \omega_r t - 2r^2 e^{-\varphi} \omega_r t \right) d\bar{\phi} dr - \left( 2N^2 e^\varphi \omega_z t - 2r^2 e^{-\varphi} \omega_z t \right) d\bar{\phi} dz \\ & + \left( 2N^2 e^\varphi \omega_r t^2 \omega_z - 2r^2 e^{-\varphi} \omega_r t^2 \omega_z \right) dr dz, \end{aligned} \quad (4.4)$$

fazendo o termo que acompanha  $d\bar{\phi} dt$  igual a zero temos a expressão para  $\omega(r, z)$

$$\omega = \frac{Nce^\varphi}{r^2 e^{-\varphi} - N^2 e^\varphi}. \quad (4.5)$$

Notamos então que a métrica (4.1) só é diagonalizada na parte temporal assumindo (4.2), por outro lado a métrica é totalmente diagonalizada localmente em (4.4) para  $t = 0$ .

Multiplicando e dividindo (4.5) por  $e^\varphi$  obtemos

$$\omega = \frac{Nce^{2\varphi}}{r^2 - N^2e^{2\varphi}} \approx \frac{Nc(1 + 2\varphi)}{r^2 - N^2(1 + 2\varphi)} \approx \frac{Nc}{r^2 - N^2} \approx \frac{Nc}{r^2 \left(1 - \frac{N^2}{r^2}\right)} \approx \frac{Nc}{r^2} \left(1 + \frac{N^2}{r^2}\right) \approx \frac{Nc}{r^2}, \quad (4.6)$$

onde nesta aproximação considera-se apenas os termos com  $N^2 \sim \varphi$ , além disso devemos ter sempre  $r^2 > N^2$ , caso contrário teremos inversão de assinatura.

Da relação (4.2) temos

$$\dot{\phi} = \omega \quad (4.7)$$

analisando o termo  $d\dot{\phi}^2$  e sabendo da relação geral  $\dot{x} = r\dot{\theta}$  temos que

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{r^2e^{-\varphi} - N^2e^\varphi} \dot{\phi} = \sqrt{e^{-\varphi} (r^2 - N^2e^{2\varphi})} \dot{\phi} \\ &\approx \sqrt{(1 - \varphi) [r^2 - N^2(1 + 2\varphi)]} \dot{\phi} \\ &\approx r \left(1 - \frac{\varphi}{2}\right) \left(1 - \frac{N^2}{2r^2}\right) \dot{\phi} \\ &\approx \omega r \end{aligned} \quad (4.8)$$

sendo nesta aproximação, considera-se apenas os termos  $N^2 \sim \varphi$ .

Substituindo (4.1) nas equações de campo de Einstein (2.22) e sendo  $T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu$  o tensor energia momento de um fluido sem pressão obtemos,

$$2rv_r + N_r^2 - N_z^2 = 0, \quad (4.9)$$

$$rv_z + N_r N_z = 0, \quad (4.10)$$

$$N_r^2 + N_z^2 + 2r^2 (\nu_{zz} + \nu_{rr}) = 0, \quad (4.11)$$

$$N_{rr} + N_{zz} - \frac{N_r}{r} = 0, \quad (4.12)$$

$$\left(\varphi_{rr} + \varphi_{zz} + \frac{\varphi_r}{r}\right) + \frac{3}{4}r^{-2} (N_r^2 + N_z^2) + \frac{N^2}{r} \left(N_{rr} + N_{zz} - \frac{N_r}{r}\right) - \frac{1}{2}(\nu_{rr} + \nu_{zz}) = \frac{8\pi G\rho}{c^2}, \quad (4.13)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional e  $\rho$  é a densidade de matéria . Acima, conforme os autores, avaliamos as contribuições da ordem de  $G$  para elementos da diagonal, o que torna  $u = 1$  e negligenciamos as contribuições de segunda ordem para os campos, exceto para  $N$ , pois queremos avaliar se alguma contribuição não linear associada à rotação pode vir a ser relevante. A combinação de (4.9) até (4.12) em (4.13) nos dá

$$\nabla^2\varphi + \frac{N_r^2 + N_z^2}{r^2} = \frac{8\pi G\rho}{c^2}, \quad (4.14)$$

onde o primeiro termo de (4.14) é o laplaciano em coordenadas polares. Esta equação apresenta uma correção à equação de Poisson para o potencial Newtoniano, com  $\varphi$  sendo proporcional ao potencial Newtoniano. Note que somente quando  $N = 0$  temos a equação de Poisson tradicional.

Para a resolução das equações de campo (4.9) a (4.13), CT propõem uma mudança de referencial, tal que este referencial seja comóvel com toda a matéria da galáxia e satisfazendo

$$U^\mu = \delta_0^\mu. \quad (4.15)$$

Sabemos que

$$U^\mu U_\mu = c^2, \quad (4.16)$$

então

$$U^\mu U_\mu = U^\mu g_{\mu\nu} U^\nu = g_{\mu\nu} \delta_0^\mu \delta_0^\nu = g_{00} = c^2 e^{-\varphi}, \quad (4.17)$$

o que implica  $\varphi = 0$ .

O fato de  $\varphi = 0$ , implica em (4.12) e em (4.14) da forma

$$N_{rr} + N_{zz} - \frac{N_r}{r} = 0, \quad (4.18)$$

e

$$\frac{N_r^2 + N_z^2}{r^2} = \frac{8\pi G\rho}{c^2}. \quad (4.19)$$

Porém a equação (4.18) pode ser expressa como

$$\nabla^2\Psi = 0, \quad (4.20)$$

uma equação de Laplace sendo  $\Psi = \int \frac{N}{r} dr$ , um campo auxiliar.

Diante desta equação, CT assumem a seguinte solução:

$$\Psi = C e^{-k_n |z|} J_0(k_n r) , \quad (4.21)$$

sendo  $C$  uma constante arbitrária e  $J_0$  a função de Bessel de ordem zero. Este é o ponto mais questionável da teoria, uma vez que a equação (4.21) é solução da equação de Laplace acima ou abaixo do plano  $z = 0$ , mas não é verdadeiramente solução desta equação para todo  $z$  e temos que a equação (4.12) não impõe nenhuma restrição para  $z$ . Portanto a presença do módulo na equação (4.21) torna o gradiente de  $\Psi$  descontínuo em  $z = 0$ . Os autores afirmam que (4.21) é solução da equação de Laplace exceto em  $z = 0$  mas devido aos bons resultados fenomenológicos, espera-se que uma abordagem mais geral possa induzir este termo. Os autores utilizam a condição de contorno  $\Psi(R_{max}) = 0$  em que  $R_{max}$  é o raio mais distante de observação da curva de rotação da galáxia, a motivação para esta condição de contorno é fenomenológica. Assumindo a validade de (4.21) e da linearidade de (4.20) temos

$$\Psi = \sum_n C_n e^{-k_n |z|} J_0(k_n r) , \quad (4.22)$$

com  $k_n$  dados pelos zeros da função de Bessel divididos pelo  $R_{max}$  satisfazendo a condição de contorno. Da equação (??) e da definição de  $\Psi$  temos que

$$V = \omega r = \frac{Nc}{r} = c \frac{\partial \Psi}{\partial r} . \quad (4.23)$$

então

$$V = -c \sum_n k_n C_n e^{-k_n |z|} J_1(k_n r) , \quad (4.24)$$

com  $J_1(x) = -\frac{dJ_0(x)}{dx}$ .

Os dados utilizados por CT [4], também foram reutilizados neste trabalho para determinar os valores de  $C_n$  e  $k_n$  através do método numérico de mínimos quadrados ( $\chi^2$ ) e seus respectivos valores estão dispostos na Tabela 1, este método numérico foi realizado via software de computação científico que por sua vez foi também utilizado para verificação da equações de campo (4.9) a (4.13).

| $C_n$                                 | $k_n$         |
|---------------------------------------|---------------|
| -0.0183357427073672095260316296213    | 0.06870930165 |
| -0.00288512125747005142309778227209   | 0.15771651740 |
| -0.000709198354026752958278260298818  | 0.24724936890 |
| -0.000888899771040694877215621630911  | 0.33690098400 |
| -0.000016755884921580081495778687447  | 0.42659764880 |
| -0.000422575327527959527448861448036  | 0.51631611340 |
| 0.0000398707701098638286530121479037  | 0.60604676080 |
| -0.000199316251743293496631477996355  | 0.69578490080 |
| 0.0000162239375551070447604184774015  | 0.78552797510 |
| -0.0000799533264319297205664255031441 | 0.87527447050 |

Tabela 4.1: Coeficientes da curva de rotação fitados para Via Láctea com base nos dados de CT

Das equações (4.23) e (4.24) temos

$$N(r, z) = - \sum_{n=0}^{10} k_n C_n r e^{-k_n |z|} J_1(k_n r) , \quad (4.25)$$

e,

$$V(r, z) = \frac{3 \times 10^8}{r} N(r, z) . \quad (4.26)$$

que representa a velocidade de rotação da galáxia em m/s. Então a partir de (4.25) e (4.26) e dos coeficientes fitados a partir dos dados astronômicos de CT, obtemos a curva de rotação para a Via Láctea, apresentado na Figura 4.1. Esta curva é uma interpolação usando 10 funções de Bessel.

A partir de (4.25) e (4.19) obtemos a distribuição de matéria bariônica Figura 4.2

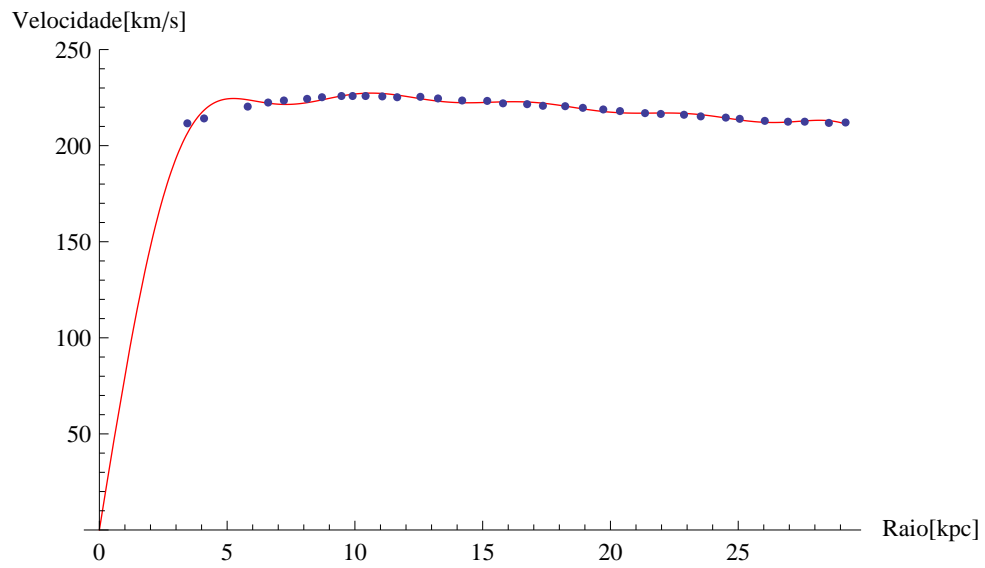


Figura 4.1: Curva de rotação para Via Láctea em unidades de km/s (velocidade de rotação) por kpc (raio da galáxia)

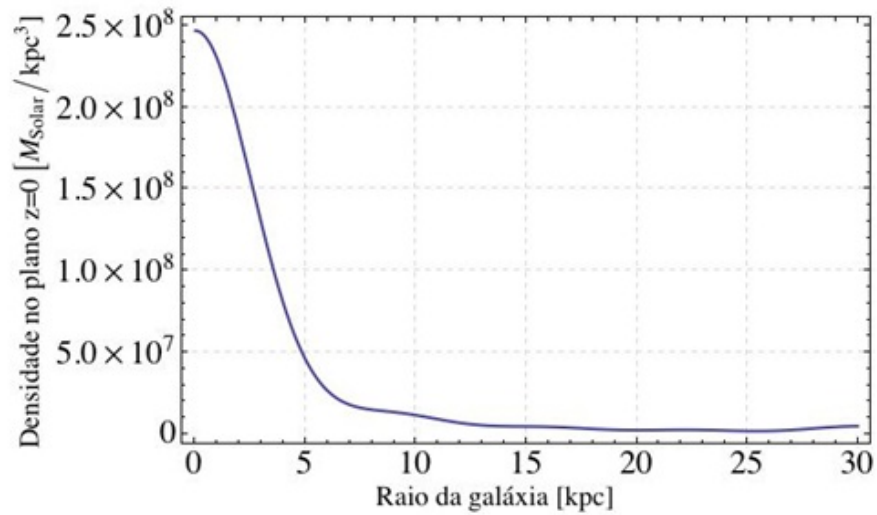


Figura 4.2: Densidade no limite em que  $z$  vai a zero da Via Láctea segundo a abordagem de Cooperstock e Tieu. Resultado reproduzido neste trabalho, e originalmente publicado em (Cooperstock et al 2006).

## Capítulo 5

# Resultados e Discussões

Agora estaremos neste capítulo abordando o ponto em que os autores não realizaram, que é compara os resultados da abordagem CT com outro modelo de matéria bariônica para a Via Láctea. Como primeiro passo, compararemos com o modelo apresentado em [8] e também [7] apresentado na Figura 5.1.

Percebemos, ao compararmos a densidade de matéria bariônica prevista pela abordagem CT Figura 4.2 com o perfil que estamos adotando como referência Figura 5.1, uma diminuição significativa da densidade no plano galáctico  $z = 0$  é quase 10 vezes menor que as estimativas astrofísicas para a massa da Via Láctea.

A abordagem de CT é diferente da abordagem usual, segundo a qual primeiro modela-se a parte da matéria usual, deduz-se a curva de rotação gerada por essa matéria e compara o resultado com as observações. A abordagem de CT infere a distribuição de matéria a partir dos dados da curva de rotação, por isso a comparação deve ser feita na distribuição de matéria e não nos dados de curva de rotação.

A seguir compararemos a abordagem CT utilizando os dados recentes para a Via Láctea publicados em [5] e [6], estes dados estão dispostos na Figura 5.2. Como mencionamos anteriormente os valores de  $C_n$  e  $k_n$  são fitados a partir dos dados da curva de rotação, utilizando as relações (4.26) e (4.25), e método numérico de interpolação de mínimos quadrados ( $\chi^2$ ) por meio de software de computação científico. A curva de rotação fica (Figura 5.4)

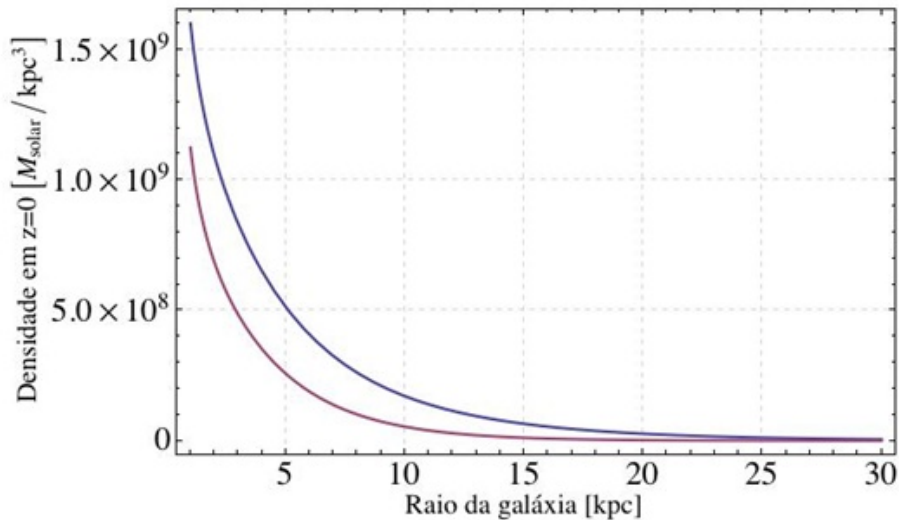


Figura 5.1: Densidade  $z = 0$  da Via Láctea em unidades de  $M_{solar}/kpc^3$ , sendo  $M_{solar} = 1,9891 \times 10^{30}kg$  e  $kpc = 3.08568 \times 10^{16}km$ . A curva azul considera a soma da densidade estelar com a do meio interstelar, a curva lilaz despreza o gás. Em ambos os casos, o bojo está sendo desconsiderado (o que aumentaria a densidade próximo ao centro).

Para obtermos Figura 5.4 foram necessários a utilização de ao menos 100 parâmetros utilizando os mesmos procedimentos da abordagem CT. Isto se deve ao fato da velocidade ser muito alta na região próxima ao centro da Via Láctea, como a modelagem se dá por funções de Bessel, são necessários muitos  $k_n$  para termos um bom perfil de velocidades.

A utilização de mais de 100 parâmetros livres para um bom perfil de velocidades é, de certa forma, comprometedor para a validação da proposta pois são muitos parâmetros, a quantidade de parâmetros excede a de pontos experimentais.

Aplicando as relações (4.19) e (4.25) obtemos o perfil de matéria bariônica Figura 5.5.

Percebemos que a densidade de matéria bariônica prevista pela abordagem CT apresenta um comportamento satisfatório próximo ao centro, por outro lado apresenta anomalias em raios próximos a 12 kpc. Apesar do perfil de velocidades apresentar raios até 30 kpc, fizemos um perfil de matéria bariônica apenas para raios até 12 kpc em virtude do perfil de velocidades apresentar oscilações fortes a partir de 12 kpc.



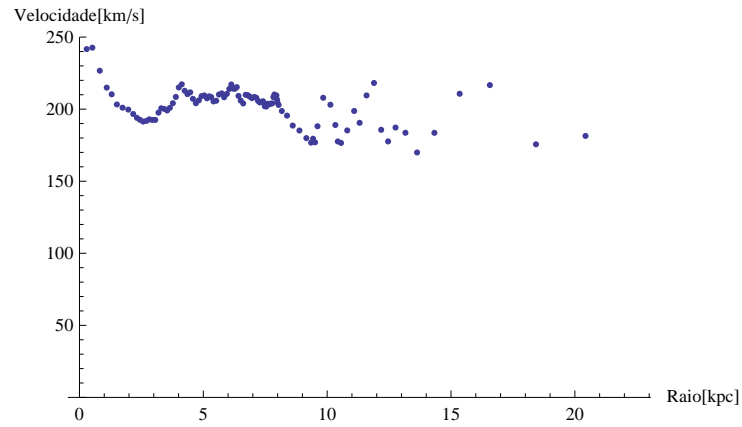


Figura 5.2: Dados da curva de rotação da Via Láctea segundo as observações mencionadas em [5] e [6] em unidades de km/s por kpc.

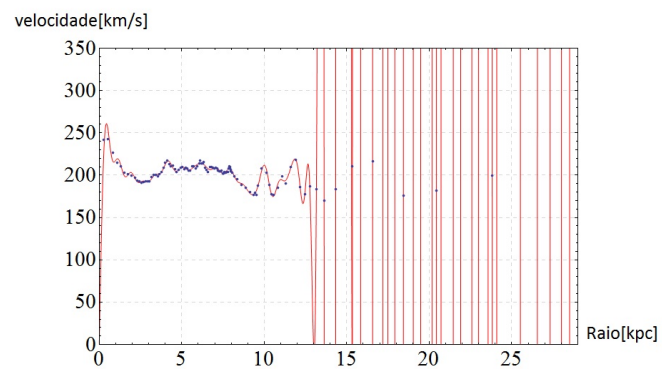


Figura 5.3: Esta figura mostra que os procedimentos de CT não são robustos.

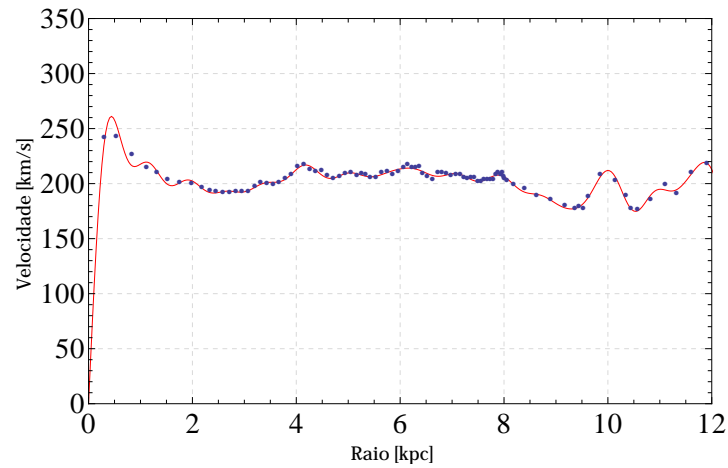


Figura 5.4: Curva de rotação da Via Láctea em km/s por kpc. Os pontos são os dados observacionais obtidos em [5] e [6] e a curva foi obtida a partir da interpolação, usando funções de Bessel, em acordo com a metodologia da proposta CT.

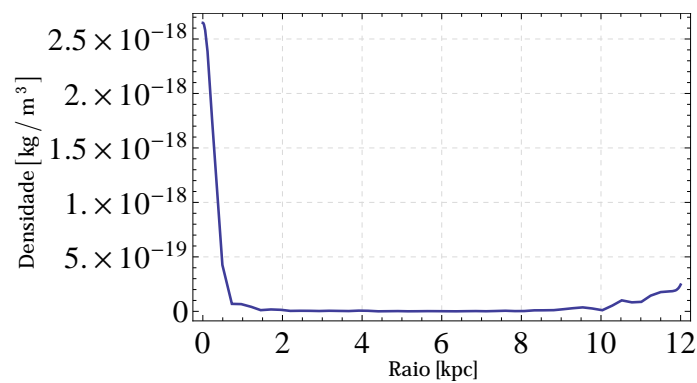


Figura 5.5: Densidade da matéria usual (i.e., bariônica) como prevista pelo modelo CT.

# Capítulo 6

## Conclusão

A abordagem CT nos mostra algo muito relevante que são as perturbações em segunda ordem, desprezadas originalmente, no limite Newtoniano alterando a equação da geodésica e conseqüentemente a determinação da força. Porém percebemos algumas falhas, como por exemplo assumir uma solução para a equação de Laplace, para todo  $z$ , sendo que esta possui seu gradiente descontínuo em  $z = 0$ . Não somente neste trabalho aborda esta crítica mas também em outros artigos [16] há questionamentos acerca da solução de 4.20 adotada por CT.

Outro detalhe interessante é que CT obtém das equações de campo, (4.9) a (4.13), para um referencial não-comóvel uma correção para a equação de Poisson (4.14). Esta sugere, ao isolarmos o termo  $\nabla^2\varphi$ , uma diminuição da matéria bariônica (usual) o que indica, em primeira análise, um aumento de matéria escura. Notamos esta diminuição analisando os perfis de matéria bariônica para a Via Láctea Figura 5.1 e a prevista pela abordagem CT Figura 4.2.

Outra crítica a abordagem proposta neste trabalho é a quantidade de parâmetros livres, 100 para ser mais exato, para conseguir um bom perfil de velocidade Figura 5.4 e de densidade de matéria Figura 5.5. A quantidade de parâmetros é inviável e isto se deve, como já mencionamos, a modelagem ser em funções de Bessel.

Estes argumentos somados sugerem então que a abordagem necessita de ajustes teóricos, pois a motivação, relacionada ao limite Newtoniano, é válida. E tanto este trabalho como

outros [16],[17],[19],[18] não criticam a motivação mas sim os ajustes teóricos que a proposta CT vêm trazendo. Em particular, [19], em linhas gerais, deduz as equações de campo sem considerar nenhuma aproximação de segunda ordem em  $N(r, z)$  e assumindo desde o início dos cálculos  $\varphi = 0$ , porém eles chegam a uma solução para  $N(r, z)$  também com problemas no eixo  $z$ .

## Referências Bibliográficas

- [1] F. Zwicky, “On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae,” *Astrophys. J.* **86**, 217 (1937).
- [2] K. Garrett and G. Duda, “Dark Matter: A Primer,” *Adv. Astron.* **2011**, 968283 (2011) [arXiv:1006.2483 [hep-ph]].
- [3] J. R. Primack, “Cosmology: small scale issues revisited,” *New J. Phys.* **11**, 105029 (2009) [arXiv:0909.2247 [astro-ph.CO]].
- [4] F. I. Cooperstock and S. Tieu, “Galactic Dynamics via General Relativity: A Compilation and New Developments,” *Int. J. Mod. Phys. A* **22**, 2293 (2007) [astro-ph/0610370].
- [5] Y. Sofue, M. Honma and T. Omodaka, “Unified Rotation Curve of the Galaxy – Decomposition into de Vaucouleurs Bulge, Disk, Dark Halo, and the 9-kpc Rotation Dip –,” arXiv:0811.0859 [astro-ph].
- [6] Y. Sofue, T. Nagayama, M. Matsui and A. Nakagawa, “Near-Solar-Circle Method for Determination of the Galactic Constants,” arXiv:1105.1219 [astro-ph.GA].
- [7] Binney, J.; Tremaine, S. **Galactic Dynamics, second edition**. Princeton University Press, 2008.
- [8] W. Dehnen and J. Binney, “Mass models of the Milky Way,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **294**, 429 (1998) [astro-ph/9612059].

- 
- [9] M. Carmeli, “Classical Fields: General Relativity and Gauge theory.” Wiley, New York, 1982.
- [10] N. Lemos. “Mecânica Analítica, 2ª edição.” Editora Livraria da Física, 2007.
- [11] S. Thornton.; J. Marion “Classical dynamics of particles and systems, 5th edition.” Brooks Cole, 2003.
- [12] S. Weinberg. “Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity.” Wiley, 1972.
- [13] F. Reif “Fundamentals of statistical and thermal physics.” McGraw-Hill, 1965.
- [14] V. C. Rubin and W. K. Ford, Jr., “Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions,” *Astrophys. J.* **159**, 379 (1970).
- [15] A. Einstein, “Concerning an heuristic point of view toward the emission and transformation of light,” *Annalen Phys.* **17**, 132 (1905).
- [16] D. Vogt and P. S. Letelier, “Presence of exotic matter in the cooperstock and tieu galaxy model,” astro-ph/0510750.
- [17] D. Vogt and P. S. Letelier, “Relativistic models of galaxies,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **363**, 268 (2005) [astro-ph/0507406].
- [18] D. Vogt and P. S. Letelier, “Comments on perspectives on galactic dynamics via general relativity,” astro-ph/0512553.
- [19] H. Balasin and D. Grumiller, “Non-Newtonian behavior in weak field general relativity for extended rotating sources,” *Int. J. Mod. Phys. D* **17**, 475 (2008) [astro-ph/0602519].