

Arthur Constantino Scardua

***Teoria Clássica de Campo e o Monopolo Magnético
Clássico***

Vitória - ES, Brasil

9 de dezembro de 2011

Arthur Constantino Scardua

*Teoria Clássica de Campo e o Monopolo Magnético
Clássico*

Monografia apresentada para obtenção de bacharel em Física pela Universidade do Espírito Santo

Orientador:

Sergio Vitorino de Borba Gonçalves

DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Vitória - ES, Brasil

9 de dezembro de 2011

Monografia de Projeto Final de Graduação sob o título “*Teoria Clássica de Campo e o Monopolo Magnético Clássico*”, defendida por Arthur Constantino Scardua e aprovada em 9 de dezembro de 2011, em Vitória, Estado do Espírito Santo, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Sergio Vitorino de Borba Gonçalves
Orientador

Prof. Dr. Eduardo Valentino Tonini
Instituto Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Clisthenis Ponce Constantinidis
Universidade Federal do Espírito Santo

Resumo

A presente monografia pretende introduzir o leitor na Teoria de Campo Clássica e na Teoria Clássica do Monopolo Magnético através da teoria de mínima ação e do desenvolvimento do eletromagnetismo.

Abstract

This monograph aims to introduce the reader in Classical Field Theory and Classical Theory of Magnetic Monopole through the theory of least action and the development of electromagnetism.

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha colega Caroline Sofiatti, que me mostrou que a Física prepara grandes coisas aos seus iniciados.

Agradecimentos

Agradeço a você, leitor, pelo seu interesse pela física dos campos e do monopolo magnético. Também a Gabriel Luchini, cuja influência me levou a escolha do tema; a Andre Alves e Rhey-misson Prado que em tempo apontaram erros que foram corrigidos; e ao Sergio Vitorino, que me suportou durante dois anos como bolsista, alunos de iniciação científica e orientando de monografia.

Sumário

Lista de Tabelas

1	Considerações iniciais	p. 10
1.1	Divisão de capítulos	p. 11
1.2	Notação	p. 11
2	Teoria Clássica de Campos	p. 13
2.1	Introdução	p. 14
2.2	Funcional	p. 14
2.2.1	Diferenciabilidade	p. 14
2.3	Cálculo Variacional	p. 15
2.4	A mecânica através do princípio de mínima ação	p. 19
2.4.1	A ação de um sistema	p. 21
2.5	Teoria Clássica de Campos	p. 22
2.5.1	Teoria Clássica de Campos na forma Lagrangiana	p. 22
2.5.2	Teoria de campo relativística	p. 23
2.5.3	Derivada de um funcional	p. 24
2.5.4	Teoria de campos na forma hamiltoniana	p. 26
2.5.5	Simetrias de Ação e Teorema de Noether	p. 28
3	Eletromagnetismo	p. 32
3.1	Relatividade	p. 33
3.2	Cargas em um campo eletromagnético	p. 36

3.2.1	Partículas Elementares e relatividade	p. 36
3.2.2	O quadripotencial de uma partícula carregada	p. 36
3.2.3	Força de Lorentz	p. 37
3.2.4	Invariância de calibre	p. 38
3.2.5	O tensor eletromagnético	p. 38
3.2.6	Invariantes	p. 40
3.3	Campo Eletromagnético	p. 40
3.3.1	Fontes	p. 43
3.3.2	A equação da continuidade	p. 44
3.3.3	O segundo par de equações de Maxwell	p. 46
4	O Monopolo Magnético	p. 48
4.1	Colisão de uma carga elétrica com um monopolo magnético	p. 49
4.2	Transformação dual	p. 51
4.3	Quantização semi-clássica	p. 53
4.4	Vetor Potencial de um Campo de Monopolo Magnético	p. 54
4.4.1	Transformação da direção da singularidade	p. 57
5	Conclusão	p. 60
5.1	Conclusão	p. 61
	Referências Bibliográficas	p. 62

Lista de Tabelas

- 1.1 Notação a ser usada na monografia p. 12
- 3.1 Componentes não nulas de $\epsilon^{0\alpha ij} \epsilon_{ij}^k$ p. 41

1 Considerações iniciais

Neste capítulo, a estrutura da monografia é apresentada.

1.1 Divisão de capítulos

A presente monografia se baseou no estudo da Teoria Clássica de Campos e do monopolo magnético clássico.

O segundo capítulo produz ferramentas matemáticas que serão usadas no estudo da teoria de campo, baseadas na introdução do livro *Calculus of variations* [Jost e Li-Jost 1998], que são aplicadas à Teoria Clássica de Campo, desenvolvida através de um estudo do livro *Mecânica Analítica* [Lemos 2007].

O terceiro capítulo desenvolve a teoria eletromagnética, seguindo o modelo do livro de teoria de campo *Course of theoretical physics: The classical theory of fields* [Landau e Lifšic 2009]: inicia-se pela relatividade restrita, onde são determinadas as propriedades do espaço. Depois desenvolve-se através do princípio minimal o comportamento de partículas carregadas no campo eletromagnético. Apesar do livro texto utilizar o *Sistema Gaussiano* de medidas, foi adotado o *Sistema Internacional*.

No quarto capítulo, são abordadas algumas características dos monopolos magnéticos, pautadas pelos livros *Magnetic monopoles* [Shnir 2005], dedicado ao assunto, e pelo livro *Classical electrodynamics* [Jackson 1999]. O capítulo se introduz pela colisão de uma partícula elétrica e uma magnética. Em seguida, é discorrido como é possível descrever o monopolo no eletromagnetismo.

Além da bibliografia citada, serviram de apoio no estudo de monopolos o livro de eletrodinâmica *Introduction to electrodynamics* [Griffiths 1999] e o artigo *Sobre a existência de monopolos magnéticos* [Schönberg 2002], que trata de propriedades dos monopolos.

1.2 Notação

Ao longo da monografia, serão utilizadas algumas notações que são descritas na tabela abaixo. Além do mais, índices repetidos serão somados da forma

$$\sum_i A_i B^i = A_i B^i \quad ,$$

onde índices latinos possuem valores de 1 a 3, e índices gregos de 0 a 3.

Símbolo	Significado
$\mathcal{F}[a, b]$	Espaço de funções contínuas definidas no intervalo $[a, b]$
C-diferenciável	Função cuja c-ésima derivada existe dentro do intervalo de definição
d	Os vetores estão em negrito
$\partial\Omega$	Borda do espaço Ω
d^4V	Volume quadridimensional
∂_μ	Representa a derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$
$A_{\mu, \nu}$	Representa a derivada parcial $\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$

Tabela 1.1: Notação a ser usada na monografia

2 Teoria Clássica de Campos

Neste capítulo são apresentados as ferramentas da Teoria Clássica de Campos.

2.1 Introdução

A *Teoria Clássica de Campo* estuda sistemas físicos cujas quantidades que os definem são funções do espaço e do tempo. Essas funções determinam um estado do sistema e são chamados *graus de liberdade* da teoria. O objetivo da teoria é encontrar uma forma explícita para os graus de liberdade, de forma a determinar os possíveis estados do sistema. Diferente da teoria clássica, a *Teoria Quântica de Campo* trata de sistemas físicos cujos graus de liberdade são operadores diferenciais regidos pela *Mecânica Quântica*. Esta monografia não tratará dessa teoria.

Este capítulo se inicia com a introdução de propriedades do espaço de funções, espaço que se encontram os graus de liberdade a serem estudados. Em seguida, é introduzido o princípio de mínima ação, que será utilizado na última seção para o desenvolvimento da Teoria Clássica de Campo.

2.2 Funcional

Um funcional é uma regra que leva um elemento do espaço de funções em um espaço real. Como, por exemplo, o funcional $F[f] = \left[f(\vec{0}) \right]^2$ que associa uma função $f(\vec{r})$ ao seu valor ao quadrado na posição $\vec{r} = \vec{0}$.

Um funcional associa um valor real a uma função de forma análoga à maneira que uma função associa a um ponto no espaço um valor real. Também de forma análoga é definido a taxa de variação de um funcional no espaço de funções, definindo-se a distância entre funções e a continuidade do espaço de funções.

Definição A *distância de n-ésima ordem* de f_1 e f_2 em um espaço de funções $\mathcal{F}[a, b]$ C -diferenciável ($C > n$) é definida por:

$$\rho_n(f_1, f_2) = \max_{a < x < b, k = \{1, \dots, n\}} \left| f_1^{(k)}(x) - f_2^{(k)}(x) \right| . \quad (2.1)$$

Definição Um funcional J é contínuo se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } \rho(f_1, f_2) < \delta \Rightarrow |J[f_1] - J[f_2]| < \varepsilon . \quad (2.2)$$

2.2.1 Diferenciabilidade

As características locais de um funcional $J[f]$ ao redor da função f é descrita pela variação do funcional causada por incremento $\delta f = \hat{f} - f$:

$$J[f + \delta f] - J[f] = \Delta J = \underbrace{L_1(f, \delta f)}_{\delta J} + \beta(\delta f) \|\delta f\| \quad , \quad (2.3)$$

onde $\lim_{\rho(0, \delta f) \rightarrow 0} \beta(\delta f) = 0$. A quantidade δJ , chamada de primeira variação de J , é uma primeira aproximação para comportamento do funcional J nas proximidades de f .

Definição Uma *forma bilinear* é um funcional $J[f, x]$ tal que é linear em f e em x . Ou seja, para todo α_1, α_2 e β_1, β_2 reais

$$\begin{aligned} J[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2] &= \\ &= \alpha_1 \beta_1 J[f_1, g_1] + \alpha_1 \beta_2 J[f_1, g_2] + \alpha_2 \beta_1 J[f_2, g_1] + \alpha_2 \beta_2 J[f_2, g_2] \quad . \end{aligned} \quad (2.4)$$

Definição Uma *forma quadrática* é um funcional $K[f] = J[f, f]$, onde J é uma forma bilinear.

Exemplo Se K é quadrático, então $K[\alpha f] = J[\alpha f, \alpha f] = \alpha^2 J[f, f] = \alpha^2 K[f]$.

Uma segunda aproximação para o funcional $J[f]$ pode ser obtida analogamente à aproximação de uma função por uma série de potências:

$$\Delta J = \underbrace{L_1(f, \delta f)}_{\delta J} + \frac{1}{2} \underbrace{L_2(f, \delta f)}_{\delta^2 J} + \beta(\delta f) \|\delta f\|^2 \quad , \quad (2.5)$$

onde quantidade $\delta^2 J$ é chamada de segunda variação de J , e se compara à segunda derivada.

No princípio minimal, procuramos funções que em funcionais sejam os menores possíveis. Ou seja, procuramos funções tais que $\delta J = 0$ e $\delta^2 J > 0$.

2.3 Cálculo Variacional

O objetivo do cálculo das variações consiste em encontrar uma função $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{u} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^d$, tal que o funcional

$$I[\mathbf{u}] = \int_a^b F(t, \mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) dt; \quad F : [a, b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R} \quad (2.6)$$

tenha um valor mínimo. Esse funcional é conhecido como *ação*, e normalmente a função solução $\mathbf{u}(t)$ satisfaz a algumas restrições como, por exemplo, as condições de contorno de

Dirichet*, onde o valor da função é dado ao longo da borda do intervalo; ou uma restrição que \mathbf{u} seja contínua e diferenciável por partes.

No caso de uma função g

$$g : \Omega \mapsto \mathbb{R} \quad , \quad \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$$

o seu extremo é dado quando sua derivada é nula:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \quad ; \quad i = \{1, 2, \dots, d\} \quad . \quad (2.7)$$

Para que esse extremo seja um mínimo, é suficiente que a matriz Hessiana $D^2g = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$ tenha determinante positivo.

Exemplo A função $f(x_1, y_2) = x_1^2 + x_2^2$ tem um mínimo em $x_1 = x_2 = 0$. De fato, $\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x_i=0} = 2 * 0 = 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 2\delta_{ij} > 0$.

A situação de um funcional é mais complexa que de uma função. Enquanto a função é derivada no espaço cartesiano, um funcional é derivado no espaço de funções.

Ideia de Minimização

Se \mathbf{u} é uma função que minimiza a ação (2.6), tal que as funções $F = F(t, \mathbf{f}, \dot{\mathbf{f}})$ e $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ são funções contínuas e com segunda derivada contínua no intervalo $[a, b]$. Então, para qualquer $\mathbf{h} \in C_0^1([a, b], \mathbb{R}^d)^\dagger$ e $s \in [0, \varepsilon)$, para algum $\varepsilon > 0$

$$I[\mathbf{u} + s\mathbf{h}] \geq I[\mathbf{u}] \quad , \quad (2.8)$$

onde

$$I[\mathbf{u} + s\mathbf{h}] = \int_a^b F(t, \mathbf{u} + s\mathbf{h}, \dot{\mathbf{u}} + s\dot{\mathbf{h}}) dt \quad . \quad (2.9)$$

O funcional da equação (2.9) pode ser descrito pela função $g(s) = I[\mathbf{u} + s\mathbf{h}]$, $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, que

*Nesta monografia será usada somente a condição de Dirichet.

$^\dagger C_0^n([a, b], \mathbb{R}^d)$ é o conjunto de funções $\mathbf{h} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^d$ n-diferenciáveis que se anulam antes de chegar no extremo do intervalo

possui um mínimo em $s = 0$, implicando que

$$\begin{aligned} g'(0) = 0 &= \left. \frac{d}{ds} I[\mathbf{u} + s\mathbf{h}] \right|_{s=0} \\ &= \int_a^b (\nabla_{\mathbf{u}} F \cdot \mathbf{h} + \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} F \cdot \dot{\mathbf{h}}) dt = 0 \\ \therefore \int_a^b \left(\nabla_{\mathbf{u}} F - \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} F \right) \cdot \mathbf{h} dt &= 0 \quad ; \quad \forall \mathbf{h} \in C_0^1([a, b], \mathbb{R}^d) \quad , \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde foi utilizado integração por partes.

Para a equação (2.10) ser desenvolvida, é necessário o *lema fundamental do cálculo de variações*.

Lema 2.3.1. (*Lema Fundamental do Cálculo de Variações*) Se $\mathbf{h} \in C^0((a, b), \mathbb{R}^d)$ satisfizer

$$\int_a^b \mathbf{h}(t) \cdot \phi(t) dt = 0; \quad \forall \phi \in C_0^\infty([a, b], \mathbb{R}^d) \quad , \quad (2.11)$$

então $\mathbf{h} \equiv \mathbf{0}$.

Prova Por absurdo, suponhamos que exista uma componente h^{i_0} que não seja nula no ponto $t = t_0$, ou seja, $h^{i_0}(t_0) \neq 0$. Como h^{i_0} é contínua, existe um $\delta > 0$ tal que

$$a < t_0 - \delta < t_0 + \delta < b \quad ,$$

onde se $|t_0 - t| < \delta \Rightarrow |h^i(t)| > \frac{1}{2}|h^i(t_0)|$.

Então, escolhemos ϕ de forma que

$$\phi^{i_0}(t) = 0, \text{ se } |t_0 - t| \geq \delta \quad ;$$

$$\phi^{i_0}(t) > 0, \text{ se } |t_0 - t| < \delta \quad ;$$

$$\phi^{i_0}(t) = 0, \text{ se } i \neq i_0 \quad .$$

Assim

$$\int_a^b \mathbf{h}(t) \cdot \phi(t) dt = \int_a^b h^{i_0}(t) \phi^{i_0}(t) dt \neq 0 \quad . \quad (2.12)$$

ABSURDO! Concluimos que t_0 não pertence ao intervalo (a, b) , então $\mathbf{h}(t) \equiv \mathbf{0}$ para todo $t \in (a, b)$. □

Teorema 2.3.2. Se $F \in C^2([a, b] \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ e $\mathbf{u} \in C^2([a, b] \times \mathbf{R}^d)$ é um mínimo de

$$I[\mathbf{u}] = \int_a^b F(t, \mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) dt \quad , \quad (2.13)$$

que atende à condição de Dirichlet nas bordas, então ele deve atender a equação diferencial de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{\mathbf{u}}}F) - \nabla_{\mathbf{u}}F = 0 \quad . \quad (2.14)$$

A (2.14) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem em \mathbf{u} :

$$\nabla_{\dot{\mathbf{u}}}(\nabla_{\dot{\mathbf{u}}}F) \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \nabla_{\mathbf{u}}(\nabla_{\dot{\mathbf{u}}}F) \cdot \dot{\mathbf{u}} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla_{\dot{\mathbf{u}}}F) - \nabla_{\mathbf{u}}F = 0 \quad . \quad (2.15)$$

Prova Da equação (2.8) à equação (2.10) mostramos que a condição mínima de $I[\mathbf{u}]$ nos leva à equação

$$\int_a^b \left(\nabla_{\mathbf{u}}F - \frac{d}{dt}\nabla_{\dot{\mathbf{u}}}F \right) \cdot \mathbf{h} dt; \forall \mathbf{h} \in C_0^1([a, b], \mathbb{R}^d) = 0 \quad , \quad (2.16)$$

a qual, pelo lema 2.3.1, nos leva à condição (2.14). \square

Exemplo (Menor distância no euclidiano) Qual é a menor distância entre dois pontos \mathbf{A} e \mathbf{B} no espaço euclidiano?

A distância entre dois pontos através de uma curva $\gamma(t) \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$, a qual $\gamma(0) = \mathbf{A}$ e $\gamma(1) = \mathbf{B}$, é a integral do comprimento infinitesimal da curva

$$C[\gamma] = \int_0^1 \|\dot{\gamma}\| dt = \int_0^1 \sqrt{\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}} dt \quad . \quad (2.17)$$

A curva γ é aquela que $C[\gamma]$ é mínimo. Nessa condição, com 2.14 em 2.17.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \|\dot{\gamma}\|}{\partial \dot{\gamma}} \right) - \frac{\partial \|\dot{\gamma}\|}{\partial \gamma} &= 0 \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}}} \right) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Lema 2.3.3. Se F não depende explicitamente de t , então a quantidade $F - \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{u}}}F$ não depende do tempo.

Prova Com o produto escalar (2.14)· $\dot{\mathbf{u}}$, obtemos*

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\mathbf{u}} \cdot \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{u}}} F) - \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} F - \left(\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial t} \right) - (\ddot{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} F - \ddot{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} F) \\ &= \left[\dot{\mathbf{u}} \cdot \frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{u}}} F) + \ddot{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} F \right] - \left(\dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} F + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \ddot{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} F \right) - \frac{\partial F}{\partial t} \\ \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{d}{dt} (F - \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} F) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.19)$$

□

Se a condição de mínimo do funcional

$$I[\mathbf{u}] = \int_a^b F(t, \mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) dt \quad (2.20)$$

está limitado à condição

$$S[\mathbf{u}] = \int_a^b G(t, \mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) dt = C_0 \quad , \quad (2.21)$$

então se faz necessário o uso dos multiplicadores de Lagrange.

No caso de funções, o extremo de $f(x, y)$ que pertence à superfície $g(x, y) = K_0$ atende a equação

$$\nabla f + \lambda \nabla g = 0 \quad . \quad (2.22)$$

Analogamente, as funções $f(s) = I[\mathbf{u} + s\mathbf{h}]$ e $g(s) = S[\mathbf{u} + s\mathbf{h}]$ possuem um extremo em $s = 0$, atendendo a equação (2.22). Portanto,

$$\left. \frac{d}{ds} (I[\mathbf{u} + s\mathbf{h}] + \lambda S[\mathbf{u} + s\mathbf{h}]) \right|_{s=0} = 0$$

Então o extremo do funcional (2.20) restrito pela condição (2.21) é a solução da condição de mínima ação do funcional

$$H[\mathbf{u}] = \int_a^b (F + \lambda S) dt \quad (2.23)$$

2.4 A mecânica através do princípio de mínima ação

A natureza é complexa. É inimaginável descrever todos os processos que ocorrem nela, e impossível conhecer precisamente o futuro de todas as coisas que a compõe. Contudo, é

*Como $F = F(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t)$

$$\frac{dF}{dt} = \nabla_{\mathbf{u}} F \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} F \cdot \frac{d\dot{\mathbf{u}}}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} F + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \ddot{\mathbf{u}} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} F$$

possível modelar a evolução temporal de sistemas que descrevam parte da natureza, escolhendo características específicas, e assim conhecer com certa precisão o futuro das características escolhidas.

O sistema que modela parte da natureza é o *sistema físico*. O objetivo de uma teoria física é poder quantificar a sua dinâmica, regida pelas regras do modelo físico, e assim descrever a natureza.

A evolução de um sistema físico se dá através de *estados*; um sistema físico muda com o tempo se ele muda de estado. Os estados são definidos por características mutáveis da natureza como a pressão, volume, posição etc. Essas características mensuradas em variáveis são os *graus de liberdade* do sistema.

O modelo físico dita regras que aplicadas ao sistema geram sua evolução. Essas regras são compostas por um *princípio de relatividade*, que relaciona os graus de liberdade observados grupo de referenciais diferentes; e um grupo de limitações dos graus de liberdade.

Em termos práticos, o sistema físico define os graus de liberdade da teoria e o modelo dita o espaço em que esses graus de liberdade evoluirão. Esse espaço é chamado de *espaço de estados*.

Dentro do contexto de espaço de estados, as limitações impostas pelo modelo restringem os graus de liberdade à uma hipersuperfície do espaço de estados e o princípio de relatividade definem as simetrias do espaço. No caso da relatividade restrita, o princípio de relatividade é dado por *referenciais inerciais* de Lorentz, que representam observadores que se movem com velocidade relativa constante entre si cuja transformação das coordenadas de um referencial $x(t)$ para um outro $\tilde{x}(\tilde{t})$ que possuem velocidade relativa v é dado por

$$\begin{cases} \tilde{x}(\tilde{t}) = \gamma \left(x + \frac{v}{c} ct \right) \\ c\tilde{t} = \gamma \left(ct + \frac{v}{c} x \right) \end{cases}, \quad (2.24)$$

onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ e c é a velocidade da luz. Então, a distância entre dois pontos neste espaço deve ser invariante sobre a transformação de Lorentz. Esse espaço é o espaço hiperbólico cujo elemento de distância infinitesimal é dado por $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$.

Entre dois estados, existem incontáveis caminhos, sucessão de estados, que os ligam no espaço de estados. Contudo, a natureza só escolhe um*. Entre todos os caminhos possíveis, existe um caminho[†] especial que todos os referenciais dentro do grupo de relatividade do modelo são capazes de identificar. Esse caminho é o mesmo seguido pela natureza.

*Lembrando que estamos em uma análise clássica, onde é possível definir trajetórias no espaço de estados.

[†]Em geral, um número contável de caminhos. Um exemplo é a trajetória luminosa através de lentes.

2.4.1 A ação de um sistema

Dentre todos os caminhos possíveis entre dois estados no espaço de estados, existe o que o grupo de relatividade concorda que é diferente dos demais. Para encontrá-lo, devemos olhar para uma quantidade relativa ao caminho tomado, e que os referenciais concordem que existem caminhos especiais para essa quantidade.

A quantidade que procuramos é a seguinte ação, formada por uma integral sobre um caminho no espaço de estados

$$S[\mathbf{u}(t)] = \int_a^b L dt \quad , \quad (2.25)$$

onde \mathbf{u} é a posição de um estado no espaço de estados, L é uma função dos graus de liberdade chamada *lagrangeana* e t é o tempo, que está parametrizando a curva no espaço de estados.

A ação $S[\mathbf{u}(t)]$ relaciona um caminho no espaço de estados a um número. Valores especiais para ação são seus máximos e mínimos relativos. Como só procuramos um caminho, podemos escolher o sinal de L de forma que as equações que regem $\mathbf{u}(t)$, conhecidas como *equações de movimento*, são geradas pela curva que minimiza $S[\mathbf{u}(t)]$. Esse é o *Princípio de Mínima Ação*.

Pela equação (2.14), a condição de minimização de $S[\mathbf{u}(t)]$ para a função $\mathbf{u}(t)$ exige que ela atenda a equação de Euler-Lagange

$$\frac{d}{dt} (\nabla_{\dot{\mathbf{u}}} L) = \nabla_{\mathbf{u}} L \quad (2.26)$$

No caso de uma partícula livre no regime newtoniano, os graus de liberdade são a posição x e a velocidade \dot{x} o grupo de relatividade é dado pela transformação de galileu

$$\begin{cases} \tilde{x}(\tilde{t}) = x + vt \\ \tilde{t} = t \end{cases} \quad . \quad (2.27)$$

A lagrangeana é dada pela energia cinética

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} \quad , \quad (2.28)$$

onde m é a massa da partícula. A ação de dois referenciais diferentes $S[x(t)]$ e $\tilde{S}[\tilde{x}(\tilde{t})]$ são tais

que

$$\begin{aligned}
S[x(t)] &= \int_a^b \frac{m\dot{x}^2}{2} dt \\
\tilde{S}[\tilde{x}(\tilde{t})] &= \int_a^b \frac{m\dot{\tilde{x}}^2}{2} d\tilde{t} = \int_a^b \frac{m\dot{x}^2}{2} d\tilde{t} + \int_a^b \left(m\dot{x}v + \frac{mv^2}{2} \right) d\tilde{t} \\
&= S[x(t)] + \text{constante} \\
\Rightarrow \delta\tilde{S}[\tilde{x}(\tilde{t})] &= \delta S[x(t)] \quad , \tag{2.29}
\end{aligned}$$

o que implica que a equação de movimento de ambos os referenciais geram a mesma trajetória. Explicitamente, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} = 0 \quad , \tag{2.30}$$

que representa a segunda lei de Newton para uma partícula livre.

2.5 Teoria Clássica de Campos

A teoria clássica de campo descreve sistemas com graus de liberdade contínuos. Ela é necessária, pois a teoria quântica de campo, a qual descreve partículas elementares, por exemplo, depende de uma formulação clássica.

2.5.1 Teoria Clássica de Campos na forma Lagrangiana

Um sistema com infinitos graus de liberdade discretos pode ser descrito pelas variáveis $q_k(t)$ com $k \in \mathbb{N}$. Já um sistema com um número contínuo de graus de liberdade não pode ser descrito como tal, mas pelas funções $q_x(t)$ com $x \in \mathbb{R}^n$; os graus de liberdade contínuos serão descritos por $\varphi(\mathbf{x}, t) = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

A lagrangiana de um sistema discreto é uma soma sobre os graus de liberdade. No sistema contínuo, será uma integral do que é a densidade lagrangiana \mathcal{L} . Ela depende de termos cinéticos dos graus de liberdade, $\dot{\varphi}(\mathbf{x}, t)$. Também deve conter informação sobre a interação local, $\nabla_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x}, t)$. Assim, sendo Ω o espaço de interesse, a ação a ser minimizada é

$$A[\varphi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \mathcal{L}(\varphi(\mathbf{x}, t), \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t), \nabla_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t) d^n\mathbf{x} = \int_{t_1}^{t_2} dt L \quad . \tag{2.31}$$

A relação entre \mathcal{L} e L é dada por

$$L = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\varphi(\mathbf{x}, t), \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t), \nabla_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t) d^n \mathbf{x} \quad . \quad (2.32)$$

Com a hipótese de que a solução mínima $\varphi(\mathbf{x}, t)$ da equação (2.31) exista, então se

$$\bar{\varphi}(\mathbf{x}, t, \varepsilon) = \varphi(\mathbf{x}, t) + \varepsilon \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \quad ,$$

onde $h(\mathbf{x}, t) \in C_0^1(\Omega \times [t_1, t_2], \mathbb{R}^n)$, portanto, $\bar{\varphi}(\mathbf{x}, t, 0) = \varphi(\mathbf{x}, t)$.

Como $A[\varphi]$ é um mínimo, então a função

$$\omega(\varepsilon) = A[\bar{\varphi}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \mathcal{L}(\bar{\varphi}(\mathbf{x}, t), \dot{\bar{\varphi}}(\mathbf{x}, t), \nabla_{\mathbf{x}}\bar{\varphi}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t) d^n \mathbf{x}$$

tem um mínimo em $\varepsilon = 0$. Portanto

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\omega}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 &= \left. \frac{\partial A}{\partial \varepsilon} \right|_{\bar{\varphi}=\varphi} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \left(\nabla_{\dot{\bar{\varphi}}} \mathcal{L} \cdot \dot{\mathbf{h}} + \nabla_{\nabla \bar{\varphi}} \mathcal{L} \cdot \nabla_{\mathbf{h}} + \nabla_{\bar{\varphi}} \mathcal{L} \cdot \mathbf{h} \right) d^n \mathbf{x} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \left[\nabla_{\varphi} \mathcal{L} - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\dot{\varphi}} \mathcal{L}) - \nabla (\nabla_{\nabla \varphi} \mathcal{L}) \right] \cdot d^n \mathbf{x} \\ &\therefore \nabla_{\varphi} \mathcal{L} - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{\dot{\varphi}} \mathcal{L}) - \nabla (\nabla_{\nabla \varphi} \mathcal{L}) = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

A relação dada pela equação (2.33) provê a dinâmica dos graus de liberdade do campo.

2.5.2 Teoria de campo relativística

Na relatividade, o espaço é quadridimensional. O tempo representa a coordenada $x^0 = ct$, onde c é a velocidade da luz. Nessa situação, não será integrado sobre um espaço $\Omega \times [a, b]$, mas o volume quadridimensional Ω' . De agora em diante não haverá distinção entre coordenadas espaciais e temporais. Na forma covariante, onde os índices repetidos representam uma soma, a equação de Euler-Lagrange tem a forma

$$\partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\varphi_{\alpha, \mu})} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\alpha}} = 0 \quad (2.34)$$

onde $\partial_{\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$.

2.5.3 Derivada de um funcional

O que representaria a derivada de um funcional vista em (2.3)? Um análogo à derivada direcional de uma função seria a quantidade

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} F[f + \varepsilon\sigma] \right|_{\varepsilon=0}, \quad (2.35)$$

onde f e σ são funções.

As funções na equação (2.35) comportassem-se como vetores no espaço de funções e o funcional é diferenciado em uma direção desse espaço. No cálculo de muitas variáveis reais, a derivada de $f(x_1, \dots, x_n)$ na direção $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ é dada por

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} f(\vec{r} + \varepsilon\vec{v}) \right|_{\varepsilon=0} = \vec{v} \cdot \nabla f, \quad ,$$

onde ∇f é o gradiente de f . O gradiente representa a ideia de derivada em n dimensões: $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}$. Analogamente, a derivada funcional $\frac{\delta F}{\delta f}$ é definida implicitamente por

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} F[f + \varepsilon\sigma] \right|_{\varepsilon=0} = \sigma \cdot \frac{\delta F}{\delta f} = \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}, t) \frac{\delta F}{\delta f} d^n x. \quad (2.36)$$

A derivada funcional tem algumas propriedades como:

1. É linear;

Prova Sejam G e H dois funcionais, e a, b dois números reais. Então $\partial \frac{(aG+bH)}{\delta f} = a \frac{\delta G}{\delta f} + b \frac{\delta H}{\delta f}$. De fato, seja o funcional $F = aG + bH$ na equação (2.36). Portanto

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} F[f + \varepsilon\sigma] \right|_{\varepsilon=0} &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} (aG[f + \varepsilon\sigma] + bH[f + \varepsilon\sigma]) \right|_{\varepsilon=0} = \\ &= \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\delta (aG + bH)}{\delta f} d^n x = \\ &= a \left. \frac{d}{d\varepsilon} G[f + \varepsilon\sigma] \right|_{\varepsilon=0} + b \left. \frac{d}{d\varepsilon} H[f + \varepsilon\sigma] \right|_{\varepsilon=0} = a \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\delta G}{\delta f} d^n x + b \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\delta H}{\delta f} d^n x \\ &\therefore \partial \frac{(aG + bH)}{\delta f} = a \frac{\delta G}{\delta f} + b \frac{\delta H}{\delta f}. \end{aligned}$$

□

2. Segue a regra de produto das derivadas;

Prova Sejam G e H dois funcionais. Então $\frac{\delta(GH)}{\delta f} = G \frac{\delta H}{\delta f} + H \frac{\delta G}{\delta f}$. De fato, seja $F = GH$

na equação (2.36), então

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{d\varepsilon} F[f + \varepsilon\sigma] \right|_{\varepsilon=0} &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} (G[f + \varepsilon\sigma]H[f + \varepsilon\sigma]) \right|_{\varepsilon=0} = \\
 &= \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\delta(GH)}{\delta f} d^n x \\
 = H \left. \frac{d}{d\varepsilon} G[f + \varepsilon\sigma] \right|_{\varepsilon=0} + G \left. \frac{d}{d\varepsilon} H[f + \varepsilon\sigma] \right|_{\varepsilon=0} &= H \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\delta G}{\delta f} d^n x + G \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\delta H}{\delta f} d^n x \\
 \therefore \frac{\delta(GH)}{\delta f} &= G \frac{\delta H}{\delta f} + H \frac{\delta G}{\delta f} .
 \end{aligned}$$

□

3. Segue a regra da cadeia.

Prova Seja uma função $\phi = \phi(F[f])$. Então $\frac{\delta\phi}{\delta f} = \frac{d\phi}{dF} \frac{\delta F}{\delta f}$. De fato,

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{d\varepsilon} \phi(F[f + \varepsilon\sigma]) \right|_{\varepsilon=0} &= \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}, t) \frac{\delta\phi}{\delta f} d^n x \\
 &= \frac{d\phi}{dF} \cdot \left. \frac{d}{d\varepsilon} F[f + \varepsilon\sigma] \right|_{\varepsilon=0} = \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}, t) \frac{d\phi}{dF} \frac{\delta F}{\delta f} d^n x \\
 \therefore \frac{\delta\phi}{\delta f} &= \frac{d\phi}{dF} \frac{\delta F}{\delta f} .
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

□

Para um funcional de mais de uma variável, $F[f_1, \dots, f_n]$, ele é definido por

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} F[f_1 + \varepsilon\sigma_1, \dots, f_n + \varepsilon\sigma_n] \right|_{\varepsilon=0} = \int_{\Omega} \sigma_k(\mathbf{x}, t) \frac{\delta F}{\delta f_k} d^n x . \tag{2.38}$$

Em comparação com a notação da variação da ação

$$\begin{aligned}
 \delta A &= \int_{\Omega} d^n x \frac{\delta F}{\delta f_k} \delta f_k \\
 &= \int_{\Omega} d^n x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_k} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi_k)} \right) \right] \delta \varphi_k ,
 \end{aligned}$$

a derivada funcional seria o primeiro termo de aproximação para $F[f + \delta f]$ em potências de δf . Portanto, a derivada de um funcional é dada por

$$\frac{\delta A}{\delta \varphi_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_k} - \nabla \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \varphi_k)} \right] , \tag{2.39}$$

onde o extremo do funcional é alcançado quando $\frac{\delta A}{\delta \varphi_k} = 0$.

2.5.4 Teoria de campos na forma hamiltoniana

As equações de Euler-Lagrange são equações diferenciais lineares de segunda ordem que podem ser simplificadas ao dobro de equações de primeira ordem com uma transformação de Legendre[Zia, Redish e McKay 2009]. No caso, a lagrangiana ($L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$) é transformada na função hamiltoniana ($H = H(\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}}, t)$) pela transformação

$$L = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - H \quad , \quad (2.40)$$

onde a variável transformada, chamada de momento conjugado, é definida como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad , \quad (2.41)$$

onde o momento conjugado a velocidade é o momento linear.

O momento conjugado contínuo $\pi^\alpha(\mathbf{x})$ é definido analogamente ao caso discreto por*

$$\pi^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_\alpha} \quad (2.42)$$

Da mesma forma que foi definido \mathcal{L} e L na equação (2.32), definimos a densidade de hamiltoniana, \mathcal{H} , como

$$\mathcal{H} = \pi^\alpha \dot{\phi}_\alpha - \mathcal{L} \quad (2.43)$$

A relação da hamiltoniana e sua densidade é similar a da lagrangiana, abordada na equação (2.32),

$$H[\varphi, \pi] = \int d^n x \mathcal{H}(\varphi, \nabla \varphi, \nabla \pi) \quad (2.44)$$

A densidade de hamiltoniana está associada com a densidade de energia assim como a hamiltoniana se associa com a energia.

Equações de Hamilton

A ação neste formalismo é

$$\begin{aligned} A[\varphi, \pi] &= \int d^{n+1}x (\pi^\alpha \dot{\phi}_\alpha - \mathcal{H}) \\ \Rightarrow \delta A &= \int d^{n+1}x \left[\left(-\pi^\alpha - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_\alpha} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \phi_\alpha)} \right) \delta \phi_\alpha + \left(\dot{\phi}_\alpha - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^\alpha} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \pi^\alpha)} \right) \delta \pi^\alpha \right] = 0 \quad . \end{aligned}$$

*Mesmo sem o suporte de um teorema como o da função implícita, será utilizado que sempre podemos encontrar π^α em função das variáveis de momento conjugado e tempo.

Anulando os termos multiplicados pelas variações, são geradas as equações

$$\dot{\varphi}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^\alpha} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \pi^\alpha)} = \frac{\delta H}{\delta \pi^\alpha} \quad . \quad (2.45)$$

$$\dot{\pi}^\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_\alpha} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \varphi_\alpha)} = -\frac{\delta H}{\delta \varphi_\alpha} \quad . \quad (2.46)$$

Com a derivada funcional, fica claro a analogia das equações de Hamilton do caso discreto com o caso contínuo.

Parênteses de Poisson

Seja X um funcional de φ e π , e \mathcal{X} sua densidade. Então

$$X[\varphi, \pi] = \int \mathcal{X}(\varphi, \nabla \varphi, \pi, \nabla \pi, \mathbf{x}, t) d^n x \quad .$$

Sejam φ e π tais que anulam-se no infinito espacial. O parêntese de Poisson é definido por

$$\{X, Y\} = \int \left\{ \frac{\delta X}{\delta \varphi_\alpha} \frac{\delta Y}{\delta \pi^\alpha} - \frac{\delta X}{\delta \pi^\alpha} \frac{\delta Y}{\delta \varphi_\alpha} \right\} d^n x \quad . \quad (2.47)$$

Com uma variação temporal

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \int \left\{ \frac{\delta X}{\delta \varphi_\alpha} \dot{\varphi}_\alpha + \frac{\delta X}{\delta \pi^\alpha} \dot{\pi}^\alpha + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} \right\} d^n x \\ &\stackrel{\text{por (2.45) e (2.46)}}{=} \int \left\{ \frac{\delta X}{\delta \varphi_\alpha} \frac{\delta H}{\delta \pi^\alpha} - \frac{\delta X}{\delta \pi^\alpha} \frac{\delta H}{\delta \varphi_\alpha} + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} \right\} d^n x \\ &= \int \left\{ \frac{\delta X}{\delta \varphi_\alpha} \frac{\delta H}{\delta \pi^\alpha} - \frac{\delta X}{\delta \pi^\alpha} \frac{\delta H}{\delta \varphi_\alpha} \right\} d^n x + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{X} d^n x \\ \Rightarrow \frac{dX}{dt} &= \{X, H\} + \frac{\partial X}{\partial t} \quad . \quad (2.48) \end{aligned}$$

Então, se X não depende explicitamente do tempo, o parêntese de Poisson descreve a evolução temporal de X . No caso especial com os funcionais

$$\begin{aligned} X_\alpha[x, \varphi_\alpha] &= \varphi_\alpha(x, t) = \int d^n \tilde{x} \delta(x - \tilde{x}) \varphi_\alpha(\tilde{x}) \quad ; \\ Y^\beta[y, \pi^\beta] &= \pi^\beta(y, t) = \int d^n \tilde{y} \delta(y - \tilde{y}) \pi^\beta(\tilde{y}) \quad , \end{aligned}$$

onde $\{X_\alpha, Y^\beta\} = \delta_\alpha^\beta \delta(x - y)$. Portanto

$$\{\varphi_\alpha(x, t), \pi^\beta(y, t)\} = \delta_\alpha^\beta \delta(x - y) \quad , \quad (2.49)$$

é a versão contínua de $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$. Além do mais: $\{\varphi_\alpha(x, t), \varphi^\beta(y, t)\} = \{\pi_\alpha(x, t), \pi^\beta(y, t)\} = 0$.

2.5.5 Simetrias de Ação e Teorema de Noether

Transformações infinitesimais

Uma transformação infinitesimal geral das posições e funções é dada por

$$\begin{aligned} x^\mu &\mapsto \tilde{x}^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu \quad ; \\ \varphi_\alpha(x) &\mapsto \tilde{\varphi}_\alpha(\tilde{x}) = \varphi_\alpha(x) + \Delta\varphi_\alpha(x) \quad . \end{aligned}$$

A variação $\delta\varphi_\alpha(x)$ da função causada pela transformação infinitesimal da função é definida como

$$\delta\varphi_\alpha(x) = \tilde{\varphi}_\alpha(x) - \varphi_\alpha(x) \quad ,$$

que difere da variação $\Delta\varphi_\alpha$ que também avalia a mudança das posições na transformação. A variação $\Delta\varphi_\alpha$ é dada por

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_\alpha(x) &= \tilde{\varphi}_\alpha(\tilde{x}) - \varphi_\alpha(x) \\ &= \tilde{\varphi}_\alpha(\tilde{x}) - \varphi_\alpha(\tilde{x}) + \varphi_\alpha(\tilde{x}) - \varphi_\alpha(x) \\ &= \delta\varphi_\alpha(\tilde{x}) + \partial_\mu\varphi_\alpha(x)\Delta x^\mu \\ \therefore \Delta\varphi_\alpha(x) &= \delta\varphi_\alpha(x) + \varphi_{\alpha,\mu}\Delta x^\mu \quad , \end{aligned} \tag{2.50}$$

onde foi desprezado termos de variação em segunda ordem e superiores: $\Delta x^\mu\Delta x^\nu$, $\delta\varphi_{\alpha,\mu}\Delta x^\mu$, $\delta\varphi_{\alpha,\mu,\nu}\Delta x^\mu\Delta x^\nu$ etc.

A derivada parcial ∂_μ comuta com a operação δ , $(\delta\varphi_\alpha)_{,\mu} = \delta\varphi_{\alpha,\mu}$, mas não comuta com a operação Δ devido ao segundo termo do lado direito da equação (2.50). A variação $\Delta\varphi_{\alpha,\beta}$, que é diferente da derivada da equação (2.50), é

$$\Delta\varphi_{\alpha,\beta}(x) = \delta\varphi_{\alpha,\beta}(x) + \varphi_{\alpha,\beta,\mu}(x)\Delta x^\mu \quad .$$

Invariância da ação

A variação da ação é dada por

$$\Delta S = \int_{\tilde{\Omega}} d^4\tilde{x} \mathcal{L}(\tilde{\varphi}_\alpha(\tilde{x}), \tilde{\varphi}_{\alpha,\beta}(\tilde{x}), \tilde{x}) - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\varphi_\alpha(x), \varphi_{\alpha,\beta}(x), x) \quad ,$$

onde a primeira densidade de Lagrangiana é dada por

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}} &= \mathcal{L}(\varphi_\alpha + \Delta\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta} + \Delta\varphi_{\alpha,\beta}, x + \Delta x) \\ &= \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\alpha} \delta\varphi_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\alpha,\beta}} \delta\varphi_{\alpha,\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \quad .\end{aligned}$$

Observamos também que

$$\left| \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right| = 1 + \frac{\partial \Delta x^\mu}{\partial x^\nu} \quad .$$

Assim

$$\Delta S = \int d^4x \left[\delta\mathcal{L} + \frac{d}{dx^\mu} (\mathcal{L} \Delta x^\mu) \right] \quad ,$$

com as equações de Euler Lagrange

$$\delta\mathcal{L} = \frac{d}{dx^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\alpha,\mu}} \delta\varphi_\alpha \right) \quad .$$

Se a ΔS é nulo

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_{\Omega} d^4x \frac{d}{dx^\mu} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_{\alpha,\mu}} \delta\varphi_\alpha + \mathcal{L} \Delta x^\mu \right) &= 0 \\ \therefore \int_{\partial\Omega} d^3x \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_{\alpha,\mu}} \delta\varphi_\alpha + \mathcal{L} \Delta x^\mu \right) &= C^{te} \quad .\end{aligned} \quad (2.51)$$

Das quantidades conservadas

Escolhemos agora o formato de nossas variações:

$$\Delta x^\mu = X^{\mu(r)} \varepsilon_{(r)} \quad \Delta\varphi_\alpha = \psi_\alpha^{(r)} \varepsilon_{(r)} \quad ,$$

onde $r = \{1, \dots, R\}$. Então temos R equações de transformação em função de R parâmetros infinitesimais.

A variação da função é dada por

$$\delta\varphi_\alpha = \left[\psi_{\alpha(r)} - \varphi_{\alpha,\nu} X^{\nu(r)} \right] \varepsilon_{(r)} \quad .$$

Como a ação é invariante a essas variações infinitesimais obtemos

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int_{\Omega} d^4x \frac{d}{dx^\mu} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\alpha,\mu}} \left[\psi_{\alpha(r)} - \varphi_{\alpha,\nu} X^{\nu(r)} \right] + \mathcal{L} X^{\mu(r)} \right\} \varepsilon_r \\ &= - \int_{\Omega} d^4x \varepsilon_r \partial_\mu \Theta^{\mu(r)} = 0 \quad ,\end{aligned}$$

onde

$$\Theta^{\mu(r)} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\alpha,\mu}} \left[\psi_{\alpha}^{(r)} - \varphi_{\alpha,\nu} X^{\nu(r)} \right] - \mathcal{L} X^{\mu(r)} \quad . \quad (2.52)$$

Como ε_r e o domínio de integração são arbitrários

$$\partial_{\mu} \Theta^{\mu(r)} = 0 = \partial_0 \Theta^{0(r)} + \nabla \cdot \vec{\Theta}^{(r)} \quad . \quad (2.53)$$

As equações acima representam R equações de conservação. Se integrarmos em um volume do espaço euclidiano obtemos

$$\frac{d}{dx^0} \int_V d^3x \Theta^{0(r)} = \int_V d^3x \partial_0 \Theta^{0(r)} = \int_V d^3x \nabla \cdot \vec{\Theta}^{(r)} = \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{\Theta}^{(r)} \quad .$$

Se V for todo o volume do espaço convencional, e o campo tender a zero no infinito, obteremos R cargas conservadas dadas por

$$\int_V d^3x \Theta^{0(r)} = C^{(r)} \quad .$$

Importante exemplo de conservação: O quadrimomento

Consideremos que a seguinte transformação infinitesimal não modifica os campos

$$\tilde{x}^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu} \quad ,$$

$$\Delta \varphi_{\alpha} = 0 \Rightarrow \Delta \varphi_{\alpha,\beta} = 0 \quad .$$

Assim, se a ação é invariante

$$\begin{aligned} \Delta S = 0 &= \int_{\Omega} \left[\tilde{\mathcal{L}} \left(1 + \frac{\partial \Delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \right) - \mathcal{L} \right] d^4x \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\alpha}} \Delta \varphi_{\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\alpha,\beta}} \Delta \varphi_{\alpha,\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} \Delta x^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} \varepsilon^{\mu} \\ \therefore \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\mu}} &= 0 \quad , \end{aligned}$$

concluimos que a lagrangiana não depende explicitamente da quadriposição.

Com a notação da seção anterior

$$\Delta x^{\mu} = \varepsilon^{\mu} = g^{\mu\nu} \varepsilon_{\nu} \Rightarrow X^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \quad ,$$

e

$$\psi_{\alpha}^{\beta} = 0 \quad .$$

Portanto,

$$T^{\mu\nu}_{,\mu} = 0 \quad , \quad (2.54)$$

onde $T^{\mu\nu}$ é o tensor energia momento dado por

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\alpha,\mu}} \varphi_{\alpha,\beta} g^{\beta\nu} - \mathcal{L} g^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\alpha,\mu}} \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial x_{\nu}} - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \quad . \quad (2.55)$$

A carga conservada pelo teorema é o quadrivetor

$$P^{\nu} = \int dV T^{0\nu} \quad .$$

A definição do tensor de momento-energia não é única. Um tensor

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_{\alpha} \Psi^{\mu\nu\alpha} \quad ; \quad \Psi^{\mu\nu\alpha} = -\Psi^{\mu\alpha\nu} \quad , \quad (2.56)$$

também satisfaz a equação (2.54).

3 *Eletromagnetismo*

“I understand how the engines work now. It came to me in a dream. The engines don't move the ship at all. The ship stays where it is and the engines move the universe around it.”

Cubert Farnsworth, Futurama

Neste capítulo será desenvolvido a teoria eletromagnética a partir do princípio variacional.

3.1 Relatividade

Em um regime clássico de partículas com velocidades próximas a da luz, o modelo de Newton não é capaz de descrever satisfatoriamente as trajetórias. As transformações entre referenciais não são as transformações de galileu (equação (2.27)); são as transformações de Lorentz (equação (2.24)). As simetrias do espaço invariante sobre as transformações de Lorentz não permitem mais que o termo $\frac{mv^2}{2}$ componha a lagrangiana. Nem o parâmetro de integração da equação eqreflagrangiana newtonia, o tempo, é invariante. Contudo, Apesar de discordarem de quanto tempo se passou, eles devem concordar no tocante ao tempo próprio, o tempo medido por um observador no referencial da partícula. Agora, todas as partículas estão fadadas ao mínimo do tempo próprio τ , quantidade que todos os referenciais inerciais relativísticos concordam, no quadriespaço (que é um espaço hiperbólico) cujo elemento de distância é

$$\|d\mathbf{S}\|^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad , \quad (3.1)$$

onde coordenadas são dadas por $x^0 = ct$, $x^i = \{x, y, z\}$, e $\eta_{\mu\nu}$ é a componente do tensor métrico dado por

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (3.2)$$

Dentre todas as possibilidades de caminho possíveis, a partícula deve escolher aquele o qual o tempo próprio é mínimo, ou seja, a distância entre dois pontos no quadriespaço deve ser mínima. Co misso, a ação é

$$S[x] = -\frac{\alpha}{c} \int \|d\mathbf{S}\| = -\alpha \int \sqrt{\frac{\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}{c^2}} d\tau \quad , \quad (3.3)$$

onde α é uma constante que deverá ser ajustada no limite newtoniano, e u^μ é a quadrivelocidade definida como*

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^\mu}{dt} = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}) \quad . \quad (3.4)$$

O módulo da quadrivelocidade é o produto escalar

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \gamma^2 \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = \gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2 \quad . \quad (3.5)$$

*Da equação (3.1), vemos que $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma$

Colocando a ação (3.3) em termos do tempo observado, obtemos que

$$S[x] = -\alpha \int_a^b \sqrt{\frac{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}}{c^2}} \frac{dt}{d\tau} d\tau = -\alpha \int_a^b \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int_a^b L_R dt \quad . \quad (3.6)$$

A lagrangiana relativística de uma partícula livre é, portanto,

$$L_R = -\alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad . \quad (3.7)$$

No limite newtoniano, o qual $\frac{v}{c} \ll 1$, a lagrangiana relativística deve ser semelhante a lagrangiana newtoniana, $L_N = \frac{mv^2}{2}$ (equação (2.28)). Com uma expansão em torno do pequeno fator $\frac{v}{c}$, a lagrangiana relativística se torna

$$L_R = -\alpha + \frac{\alpha v^2}{2 c^2} + O\left(\frac{v^3}{c^3}\right) \quad , \quad (3.8)$$

onde $O\left(\frac{v^3}{c^3}\right)$ representa os demais termos da expansão, de ordem igual ou superior a $\frac{v^3}{c^3}$.

Em verdade, a expansão deve produzir as mesmas equações de movimento. Isso significa que ambas as lagrangianas, a relativística com pequenas velocidades e a não relativística devem diferir apenas por uma derivada total, que gera um termo constante na ação. Traduzindo matematicamente, queremos que

$$\lim_{\frac{v}{c} \rightarrow 0} (L_R - L_N) = \frac{dg(t)}{dt} \stackrel{(3.8)}{=} \lim_{\frac{v}{c} \rightarrow 0} \left[-\alpha + \frac{v^2}{2} \left(\frac{\alpha}{c^2} - m \right) + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right] \quad , \quad (3.9)$$

onde g é uma função qualquer de t .

A solução da equação (3.9) tal que α seja uma constante requer que o segundo termo da equação seja zero*

$$\alpha = mc^2 \quad . \quad (3.10)$$

A lagrangiana relativística definida em (3.7) se torna

$$L_R = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad . \quad (3.11)$$

Com a lagrangiana relativística definida, podemos determinar o momento linear relativístico e a energia de uma partícula livre. O momento linear newtoniano é dado momento conjugado à

*Caso o segundo termo da equação (3.9) fosse diferente de zero, então a derivada temporal de $g(t)$ dependeria de um fator v^2 , $\frac{dg(t)}{dt} = -\alpha - \frac{mv^2}{2}$, que não pode ser descrito por uma derivada total no tempo. Ou seja, $g(t) = -\alpha - \frac{m}{2} \int v^2 dt$ dependeria da trajetória da partícula, de forma que $\delta g \neq 0$; absurdo, por hipótese.

velocidade; com a equação (2.41) obtemos

$$\vec{P} = \nabla_{\vec{v}} L_R = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad . \quad (3.12)$$

A energia de uma partícula livre é dada pela hamiltoniana, apresentada na equação (2.40)

$$\varepsilon_R = \vec{P} \cdot \vec{v} - L_R = \frac{mv^2 + mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad . \quad (3.13)$$

A equação (3.12) não segue a segunda lei de Newton. De fato, da derivada do momento linear,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{a} + \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{v}{c^2} \cdot \vec{a}\right) \vec{v} \quad , \quad (3.14)$$

não é diretamente proporcional à aceleração. Esse fato era esperado, visto que a lagrangiana relativística é diferente da lagrangiana newtoniana, resultando em diferentes equações de movimento.

A dinâmica da partícula livre é dada pela variação da ação apresentada em (3.6), que é dada por

$$\delta S[x] = -mc\delta \int_a^b \sqrt{\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d\tau = -m \int_a^b \frac{\eta_{\sigma\varepsilon} \left(u^\sigma \frac{d\delta x^\varepsilon}{d\tau} + \frac{d\delta x^\sigma}{d\tau} u^\varepsilon\right)}{2\sqrt{\frac{\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}{c^2}}} d\tau \quad . \quad (3.15)$$

Como $\eta_{\mu\nu}$ é simétrico em seus índices e, pela equação (3.5), $\sqrt{\frac{\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}{c^2}} = 1$, fazendo uma integração por partes da equação (3.15) obtemos

$$\delta S[x] = \int_a^b \frac{d(mu_\sigma)}{d\tau} \delta x^\sigma d\tau = \int_a^b \frac{dP_\sigma}{d\tau} \delta x^\sigma d\tau \quad . \quad (3.16)$$

Assim, do *Lema Fundamental do Cálculo de Variações*, encontramos que a lei que rege a dinâmica de partículas livres relativísticas é dada por

$$\frac{dP_\sigma}{d\tau} = 0 \quad . \quad (3.17)$$

Podemos descrever as componentes do quadrimomento em função do momento e da energia

não relativísticas. Basta observarmos que

$$P^\sigma = -m \frac{dx^\sigma}{d\tau} = -m \frac{dx^\sigma}{dt} \frac{dt}{d\tau} = - \left(\frac{\varepsilon_R}{c}, \frac{\vec{P}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) . \quad (3.18)$$

A partir da relação obtida em (3.18), obtemos

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} P_\mu P_\nu &= m^2 \eta^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = mc^2 = \frac{\varepsilon_R^2}{c^2} - \frac{\|\vec{P}\|^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ \therefore \varepsilon_R^2 &= \frac{\|\vec{P}\|^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + m^2 c^4 . \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.2 Cargas em um campo eletromagnético

3.2.1 Partículas Elementares e relatividade

A interação de partículas pode ser descrita com ajuda do conceito de campo. Uma partícula cria um campo, e esse campo interage com outras partículas criando uma dinâmica. Na mecânica não relativística, o campo é só mais um auxiliar matemático. Na relatividade, ele ganha um caráter independente, pois esses campos não são instantâneos; ou seja, se propagam.

Nessa teoria, não podem existir objetos rígidos, então as partículas elementares são pontos*.

3.2.2 O quadripotencial de uma partícula carregada

Em um modelo não quântico, podemos descrever completamente a dinâmica de uma partícula carregada sob a ação de um campo eletromagnético através de uma ação que contemple o comportamento de uma partícula com massa e a interação do campo com uma partícula com carga q . Como estamos em um espaço quadridimensional, os graus de liberdade do campo eletromagnético devem ser descritos por um quadrivetor $A^\mu = A^\mu(x) = (\phi, c\mathbf{A})$, o quadripotencial[†]. A interação do campo com a partícula deve ser proporcional à carga da partícula e aos graus de

*Se aplicarmos uma força em um ponto de um corpo extenso, esse ponto se moverá primeiro que os outros que pertencem ao corpo, devido à propagação da interação. Haverá movimento relativo entre os pontos do corpo extenso, impedindo que o mesmo seja um corpo rígido. Sendo assim, partículas elementares devem ser pontuais. Caso contrário ela seria um corpo extenso e poderia ser dividida em partes mais elementares.

[†]O quadripotencial também pode ser expresso como $A_\mu = (\phi, -\mathbf{A})$

liberdade do campo sobre a trajetória da partícula. Essa ação pode ser descrita por

$$S[x] = -mc^2 \int_a^b d\tau - \frac{q}{c} \int_{\gamma[x]} \eta_{\mu\nu} A^\mu dx^\nu \quad , \quad (3.20)$$

onde as constantes relativas à interação campo-partícula foram escolhidas por conveniência, e γ é a curva que representa o caminho percorrido pela partícula no quadriespaço.

Colocando a integral da equação (3.20) em termos do tempo t , reescrevemos a ação como

$$S[x] = \int_{t_0}^{t_f} (-mc^2 \gamma^{-1} - q\phi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) dt \quad , \quad (3.21)$$

onde obtemos a lagrangiana

$$L_p = -mc^2 \gamma^{-1} - q\phi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \quad . \quad (3.22)$$

O momento conjugado obtido da lagrangiana descrita em (3.22) é

$$\mathbf{P} = \nabla_{\mathbf{v}} L_p = \frac{m\mathbf{V}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\mathbf{A} \quad . \quad (3.23)$$

A energia obtida dessa partícula é

$$\varepsilon_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} - L_p = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\phi \quad . \quad (3.24)$$

3.2.3 Força de Lorentz

Utilizando o princípio de mínima ação,

$$\frac{d}{dt} (\nabla_{\mathbf{v}} L_p) = \nabla_{\mathbf{r}} L_p \quad ,$$

na lagrangiana de uma partícula carregada definida em (3.22), obtemos as equações de movimento

$$\dot{\mathbf{P}} = q \left[\left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] \quad . \quad (3.25)$$

As quantidades medidas na trajetória de uma partícula são a variação do módulo de sua velocidade e a curvatura de sua trajetória. Essas quantidades são definidas pelos vetores campo elétrico e campo magnético, funções dos graus de liberdade do campo, dadas por

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{cases} \quad . \quad (3.26)$$

A definição em (3.26) não é única. De fato, temos uma liberdade em modificar o quadripotencial de tal modo que os vetores elétrico e magnético não mudem: as equações de movimento permanecem inalteradas.

3.2.4 Invariância de calibre

Ações que diferem por uma constante apresentam as mesmas equações de movimento. Realmente, se S e $\tilde{S} = S + C^{\text{te}}$ são ações que diferem por uma constante, então

$$\delta\tilde{S} = \delta(S + C^{\text{te}}) = \delta S \quad .$$

A transformação

$$A_\mu \rightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \quad , \quad (3.27)$$

onde f é contínua e pode assumir mais de um valor no ponto (x, t) , desde que $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ seja única para o ponto (x, t) , não altera as equações de movimento da equação (3.25). De fato, basta observar que a ação modificada

$$\tilde{S} = S + \int_a^b \frac{q}{c} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^\mu = S + \int d\left(\frac{q}{c}f\right) = S + C^{\text{te}} \quad , \quad (3.28)$$

onde foi utilizado como hipótese que a carga q não depende da trajetória no espaço-tempo; ou seja, a carga é conservada durante todo o movimento.

Como as ações diferem apenas por uma constante, as equações de movimento não são alteradas. Reconhecemos, portanto, que o campo eletromagnético tem $4 - 1 = 3$ graus de liberdade. A mudança do quadripotencial chama-se mudança de calibre, e os novos potenciais dados por

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \nabla f \\ \tilde{\phi} = \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \end{cases} \quad . \quad (3.29)$$

3.2.5 O tensor eletromagnético

Vamos procurar equações de movimento mais gerais que as equações (3.25), que dependem do tempo do observador. Para tanto, vamos variar a ação*

$$S = -mc^2 \int_a^b \|\hat{u}\| d\tau - \frac{q}{c} \int_\gamma A_\mu dx^\mu \quad , \quad (3.30)$$

*Devemos sempre ter em mente que \hat{u} é o vetor tangente unitário à trajetória da partícula no espaço-tempo. É ele que carrega a dependência das variáveis que serão variadas no princípio de mínima ação: x, y, z e t .

onde γ é a trajetória da partícula. Variando a equação (3.30), obtemos

$$\begin{aligned}\delta S &= -mc^2 \int_a^b \delta \sqrt{\frac{1}{c^2} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau - \frac{q}{c} \int_\gamma \delta A_\mu dx^\mu - \frac{q}{c} \int_\gamma A_\mu \delta dx^\mu \\ &= -m \int_a^b \frac{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}}{\|\hat{u}\|} \delta \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) d\tau - \frac{q}{c} \int_\gamma \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \delta x^\mu dx^\nu - \frac{q}{c} \int_\gamma A_\mu d\delta x^\mu \\ &= -m \int_a^b \frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} d\tau - \frac{q}{c} \int_a^b \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau - \frac{q}{c} \int_a^b A_\mu \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} d\tau \quad . \quad (3.31)\end{aligned}$$

Aplicando integração por partes no primeiro e no último termo da equação (3.31), observando que $\delta x^\mu(a) = \delta x^\mu(b) = 0$, obtemos que

$$\delta S = \int_a^b \left[m \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx_\mu}{d\tau} \right) - \frac{q}{c} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] \delta x^\mu d\tau \quad , \quad (3.32)$$

onde usou-se que $\frac{dA_\mu}{d\tau} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}$.

A equação de movimento quadridimensional, dada pelo *Lema Fundamental do Cálculo das Variações* sobre a equação (3.32), é

$$m \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx_\mu}{d\tau} \right) = \frac{q}{c} F_{\mu\nu} u^\nu \quad , \quad (3.33)$$

onde o tensor $F_{\mu\nu}$ é o *Tensor Eletromagnético*, cujas componentes são

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & -cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

De fato, com $i, j, k = \{x, y, z\}$, expandimos o tensor nas componentes do campo elétrico*

$$F_{it} = -F_{ti} = \frac{\partial A_t}{\partial x^i} - c \frac{\partial A_i}{\partial ct} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} + \frac{\partial A_i}{\partial t} = -E_i \quad . \quad (3.35)$$

*Recordando que $A_\mu = (\phi, -\mathbf{A})$.

Nas componentes do tensor eletromagnético que descrevem o campo magnético

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{kij} F_{ij} &= \frac{1}{2} (F_{ij} - F_{ji} |_{i,j \neq k} \varepsilon_{kij} = F_{ij} |_{i,j \neq k} \varepsilon_{kij} = \\
&= \frac{c}{2} \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{kij} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \right) = \\
&= \sum_{i,j=1}^3 c \varepsilon_{kij} \frac{\partial A_i}{\partial x^j} = -c [\nabla \times \mathbf{A}]_k = -c B_k \quad . \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Se analisarmos a ação quadridimensional em (3.30), obtemos a densidade de lagrangeana

$$\mathbf{L}_q = -m \sqrt{u_\mu u^\mu} - \frac{q}{c} A_\mu u^\mu \quad , \quad (3.37)$$

o qual representa o quadrimomento

$$P_\mu = \frac{\partial \mathbf{L}_q}{\partial u^\mu} = -m c u_\mu - \frac{q}{c} A_\mu \quad . \quad (3.38)$$

3.2.6 Invariantes

É possível, com o tensor antissimétrico $F_{\mu\nu}$ observarmos duas quantidades que não depende do observador. Elas são:

$$\begin{cases} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2(c^2 B^2 - E^2) \quad , \\ \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} = -4c \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad , \end{cases} \quad (3.39)$$

o primeiro termo é um escalar, o segundo um pseudo-escalar.

Ambas as quantidades são candidatas á minimização. Contudo, devemos observar que o $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$, assim como todo o pseudo-escalar, não deve participar da ação, que é um escalar. Além do mais, $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}$ pode ser escrito na forma de uma quadridivergência, como se segue

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} = 4 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} \right) \quad , \quad (3.40)$$

de forma que nenhuma informação nova é somada a equação de movimento.

3.3 Campo Eletromagnético

Até agora, a ação das partículas carregadas nos deu propriedades sobre os campos eletromagnéticos que elas estavam inseridas. A relação entre esses vetores de campo e seus graus de

liberdade é dada pela equação (3.26). Aplicando o rotacional no campo elétrico, obtemos que

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \times \nabla \phi = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \therefore \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \quad .\end{aligned}\quad (3.41)$$

Aplicando o divergente no campo magnético, obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad .\quad (3.42)$$

Essas são as equações homogêneas do eletromagnetismo. Elas representam duas das quatro equações de Maxwell. Elas podem ser escritas com ajuda do tensor eletromagnético através da equação

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\varepsilon^{\beta\alpha\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) = 0 \quad .\quad (3.43)$$

De fato, se observarmos as componentes da divergência, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta} F_{\nu\beta} \right) &= \varepsilon^{\mu\alpha 0i} \frac{\partial F_{0i}}{\partial x^\alpha} + \varepsilon^{\mu\alpha i0} \frac{\partial F_{i0}}{\partial x^\alpha} + \varepsilon^{\mu\alpha ij} \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^\alpha} \\ &= \varepsilon^{\mu\alpha 0i} \frac{\partial E_i}{\partial x^\alpha} - \varepsilon^{\mu\alpha i0} \varepsilon^k{}_{ij} \frac{\partial B_k}{\partial x^\alpha} \quad ,\end{aligned}\quad (3.44)$$

onde os índices latinos vão de 1 a 3, e os gregos de 0 a 3.

Vamos analisar a equação (3.44) para cada componente. Para tanto, devemos expandir o fator $\varepsilon^{0\alpha ij} \varepsilon^k{}_{ij}$

ij	$\varepsilon^{0\alpha ij} \varepsilon^k{}_{ij}$	α
12	1 · 1	3
23	1 · 1	1
31	1 · 1	2
13	(-1) · (-1)	2
32	(-1) · (-1)	1
21	(-1) · (-1)	3

Tabela 3.1: Componentes não nulas de $\varepsilon^{0\alpha ij} \varepsilon^k{}_{ij}$

A componente $\mu = 0$ nos dá a equação

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\varepsilon^{0\alpha\nu\beta} F_{\nu\beta} \right) &= -c \varepsilon^{0\alpha ij} \varepsilon^k{}_{ij} \frac{\partial B_k}{\partial x^\alpha} = 0 \\ &= c - 2\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad ,\end{aligned}\quad (3.45)$$

a qual representa a segunda equação homogênea de Maxwell.

A componente $\mu \neq 0 \Rightarrow \mu = l$ resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\varepsilon^{l\alpha\nu\beta} F_{\nu\beta} \right) &= \varepsilon^{l\alpha 0i} \frac{\partial E_i}{\partial x^\alpha} - c \varepsilon^{l\alpha i0} \varepsilon^k{}_{ij} \frac{\partial B_k}{\partial x^\alpha} = 0 \\ &= 2 [\nabla \times \mathbf{E}]^l + c \varepsilon^{0li0} \varepsilon^k{}_{ij} \frac{\partial B_k}{\partial x^0} \\ &= 2 \left[\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] , \end{aligned} \quad (3.46)$$

que representa a primeira equação homogênea de Maxwell.

A ação geral de um sistema eletromagnético deve conter termos das partes

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_c + \mathbf{A}_{cp} + \mathbf{A}_p , \quad (3.47)$$

onde \mathbf{A}_p é a ação da partícula dada por

$$\mathbf{A}_p = \sum_i -m_i c^2 \int_a^b d\tau , \quad (3.48)$$

onde o somatório é feito sobre todas as partículas, e a integral sobre o caminho da partícula no espaço-tempo. \mathbf{A}_{cp} é a ação de interação das partículas com o campo eletromagnético, dada por

$$\mathbf{A}_{cp} = \sum_i -\frac{q}{c} \int_{\gamma_i} A_\mu dx^\mu = \sum_i -\frac{q}{c} \int_{\gamma_i} A_\mu u^\mu d\tau . \quad (3.49)$$

As ações \mathbf{A}_p e \mathbf{A}_{cp} dizem respeito à trajetória da partícula no espaço-tempo. A ação \mathbf{A}_c se refere ao campo, não dependendo de uma trajetória em específico, mas de todos os seus graus de liberdade em todo o volume do quadriespaço. Essa ação se faz necessário para retirar a ambiguidade que existe entre os campo elétrico e magnético se considerássemos somente as equações homogêneas: \mathbf{E} , \mathbf{B} e $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t}$, $\mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{Y}$ são soluções das mesmas equações diferenciais homogêneas. Essas soluções, contudo, tem uma realidade física diferente. Essas soluções dizem, por exemplo, que existe e ao mesmo tempo não existe trabalho sendo executado sobre a partícula no mesmo referencial ($Y = -Ect$).

A ação \mathbf{A}_c deve conter campos escalares com derivadas até a primeira ordem dos graus de liberdade* dos campos elétrico e magnético, A_μ . Pela observação, constata-se que campos eletromagnéticos seguem o princípio da superposição; o que implica em equações lineares diferenciais. Essas equações podem ser obtidas com termos quadrados das derivadas primeiras dos graus de liberdade. Os escalares que atendem a essas exigências são os invariantes $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ e $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}$. Já mencionamos que esse segundo pode ser escrito como uma quadridi-

*Se houvesse derivadas de segunda ordem dos graus de liberdade na ação, perderíamos a propriedade de superposição das ondas.

vergência, não acrescentando informações ao sistema*. Portanto, ao que representa os campos é dada por

$$\mathbf{A}_c = C^{\text{te}} \int_{\text{tudo}} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} dV \quad . \quad (3.50)$$

Observamos que $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(c^2 B^2 - E^2)$. O E^2 contém termos proporcionais a $\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)^2$, que devem ser positivos na lagrangiana. Caso contrário variações cada vez maiores de \mathbf{A} minimizariam mais ainda \mathbf{A}_c . Assim, no sistema gaussiano de medida, a ação final toma a forma†

$$\mathbf{A} = - \sum_i \int_a^b \left(m_i + \frac{q}{c} A_\mu u^\mu \right) d\tau - \frac{\epsilon_0}{4c} \int_{\text{tudo}} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} dV \quad . \quad (3.51)$$

A equação (3.51) demonstra que há uma dependência de A_μ e a velocidade e posição das cargas.

3.3.1 Fontes

As cargas nem sempre são tratadas como pontos discretos. Elas também podem ser descritas por uma densidade de carga $\rho = \rho(\mathbf{r})$, que retomam o caso discreto com

$$\rho_{\text{Dis}} = \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad . \quad (3.52)$$

A carga total não depende do sistema de referência‡, apesar da densidade depender. Portanto, $dq = \rho dV$ é invariante. Com isso, obtemos a relação§

$$dq = \rho dV = \frac{\partial \rho}{\partial x^\mu} dV dx^\mu = \left[\frac{\partial(\rho v^\mu)}{\partial x^\mu} - \rho \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\mu} \right] dV dt = \frac{\partial \rho v^\mu}{\partial x^\mu} dV dt \quad , \quad (3.53)$$

onde $v^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} = (c, \mathbf{v})$ e $c dV dt$ é o quadrivolume infinitesimal.

Vamos definir a quantidade $j^\mu = \rho v^\mu$ como quadricorrente

$$j^\mu = \gamma(c\rho, \mathbf{j}) \quad . \quad (3.54)$$

*A integral de uma quadridivergência sobre um volume é, pelo teorema de Stokes, a integral sobre a borda do volume:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f^i}{\partial x^i} dV = \int_{\partial\Omega} f^i n_i dA \quad ,$$

onde n_i é a normal sobre a hipersuperfície quadridimensional. No princípio variacional, a variação sobre as bordas é nula, de forma que a variação da integral acima também é nula.

†No sistema internacional de unidades.

‡Como tínhamos proposto antes quando mostramos a invariância de calibre.

§As velocidades não dependem das posições das partículas, portanto, $\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\mu} = 0$.

Analisando,

$$\int \rho dV = \frac{1}{c} \int j^0 dV = \frac{1}{c} \int j^0 dS_0 \quad , \quad (3.55)$$

onde dS_μ é o elemento de área perpendicular à coordenada x^μ .

Podemos descrever ação da interação campo-partícula com a quadricorrente, passando de uma distribuição discretas de cargas para uma distribuição contínua da forma

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\text{cp}} = - \sum \frac{q}{c} \int A_\mu dx^\mu \rightarrow \mathbf{A}_{\text{cp}} = - \frac{1}{c} \int \rho A_\mu dx^\mu dV = - \frac{1}{c^2} \int j^\mu A_\mu d^4V \quad , \quad (3.56)$$

onde d^4V é o elemento do volume do quadriespaço.

Dessa maneira, obtemos a ação geral para ação do eletromagnetismo:

$$\mathbf{A} = - \sum \int mc^2 d\tau + \int \left(- \frac{\epsilon_0}{4c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{A_\mu j^\mu}{c^2} \right) d^4V \quad . \quad (3.57)$$

3.3.2 A equação da continuidade

A taxa de variação com que muda a quantidade de carga no interior de um volume é dada pela derivada

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho dV \quad . \quad (3.58)$$

Essa mesma quantidade é definida pela quantidade de portadores de carga que atravessam a superfície do volume. O fluxo de portadores em uma superfície fechada é determinado pela integral de superfície

$$- \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad , \quad (3.59)$$

onde o sinal negativo representa que partículas que saem da superfície, \mathbf{v} paralelo a $d\mathbf{S}$, representam uma queda no número de partículas no interior do volume.

Da igualdade das equações (3.58) e (3.59), é formulada a *equação da continuidade*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho dV = - \oint_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad . \quad (3.60)$$

A equação (3.60) pode ser descrita na forma diferencial através do *Teorema de Gauss*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho dV &= - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{j} dV \\ \therefore \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (3.61)$$

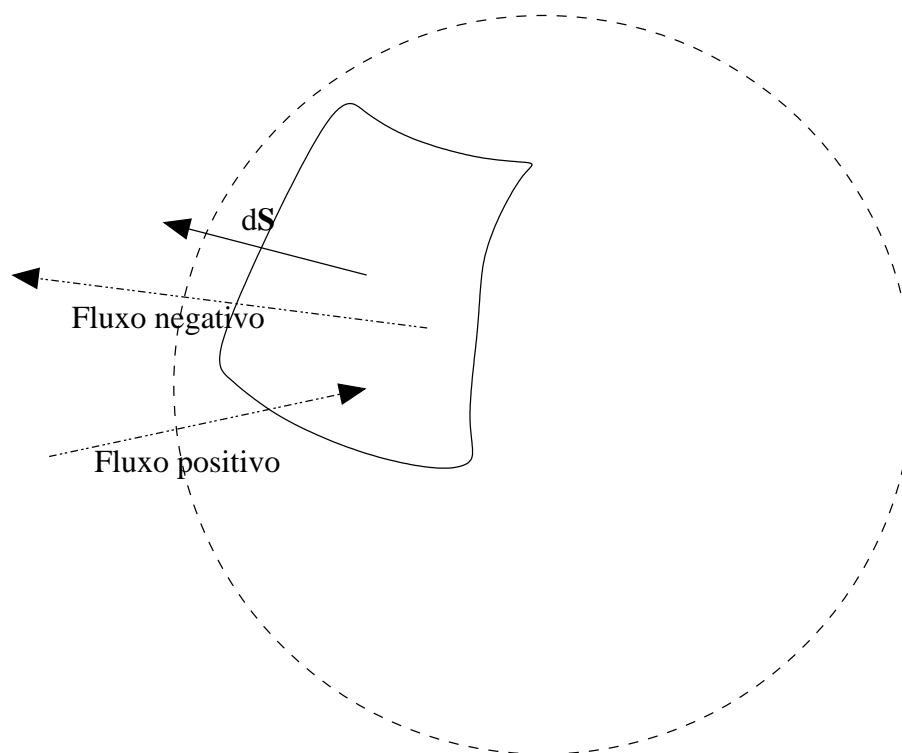


Figura 3.1: A variação de carga em um determinado volume é igual ao fluxo carga através da superfície do volume.

cuja forma quadridimensional é dada por

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad . \quad (3.62)$$

A transformação de calibre está relacionada com a conservação da carga. A transformação de calibre $A_\mu \rightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu - \frac{\partial f}{\partial x^\mu}$ não alterará as equações de movimento se a variação integral apresentada ao substituir-se A_μ por \tilde{A}_μ na equação (3.57) for nula. Ou seja,

$$\delta \int j^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} d^4V = 0 \quad . \quad (3.63)$$

A equação (3.63) é sempre verdadeira no eletromagnetismo, pois pela equação (3.62), a equação (3.63) é uma integral sobre um quadridivergente, gerando somente termos de borda cuja variação é nula.

No caso de uma carga pontual, cuja densidade é dada por $\rho = q\delta(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})$, a corrente é determinada por

$$\mathbf{j} = q \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial t} \delta(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}) \quad , \quad (3.64)$$

onde $\frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial t}$ é a velocidade \mathbf{v} da partícula. Neste caso, a equação da continuidade também é atendida

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}}\rho \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial t} = -\nabla_{\mathbf{r}}\rho \cdot \mathbf{v} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad . \quad (3.65)$$

3.3.3 O segundo par de equações de Maxwell

As equações de campo são encontradas variando-se os graus de liberdade do campo: o quadripotencial. Da equação (3.57), a densidade de lagrangiana que descreve o campo eletromagnético é

$$\mathcal{L}_e = -\frac{\epsilon_0}{4c} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{A_\mu j^\mu}{c^2} \quad . \quad (3.66)$$

As equações de movimento determinadas pela equação (3.66) são dadas pela equação de Euler-Lagrange (2.34)

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial (\partial_\mu A_\alpha)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial A_\alpha} = 0 \quad , \quad (3.67)$$

As derivadas contidas na equação (3.67) são

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial (\partial_\mu A_\alpha)} &= -\frac{\epsilon_0}{2c} F^{\beta\theta} \frac{\partial F_{\beta\theta}}{\partial (\partial_\mu A_\alpha)} \\ &= \frac{\epsilon_0}{2c} F^{\beta\theta} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\alpha)} (\partial_\theta A_\beta - \partial_\beta A_\theta) \\ &= \frac{\epsilon_0}{c} F^{\alpha\mu} \quad , \end{aligned} \quad (3.68)$$

e

$$\frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial A_\alpha} = -\frac{1}{c^2} j^\alpha \quad . \quad (3.69)$$

A partir das equações (3.68) e (3.69), a equação de movimento (3.67) se torna

$$\frac{F^{\alpha\mu}}{\partial x^\mu} = -\frac{1}{\epsilon_0 c} j^\mu \quad . \quad (3.70)$$

As equações (3.70) representam as equações não homogêneas de Maxwell. Sua componente espacial, $\mu = i = \{1, 2, 3\}$ representa a equação

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} + \frac{1}{c} \frac{\partial F^{i0}}{\partial t} &= -\frac{1}{\epsilon_0 c} j^i \\ &= -c \epsilon_{k0}{}^{ij} \frac{\partial B^k}{\partial x^j} + \frac{1}{c} \frac{\partial E^i}{\partial t} \\ \therefore \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad . \end{aligned} \quad (3.71)$$

A componente temporal da equação (3.70), $\mu = 0$, representa a equação

$$\begin{aligned}\frac{F^{0j}}{\partial x^j} &= -\frac{1}{\epsilon_0 c} j^0 \\ &= -\frac{\partial E^j}{\partial x^j} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \therefore \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad .\end{aligned}\tag{3.72}$$

As equações (3.41), (3.42), (3.71) e (3.72) são as equações de Maxwell para cargas elétricas e correntes elétricas no vácuo. Essas equações determinam completamente o campo eletromagnético e são as equações fundamentais da eletrodinâmica.

4 *O Monopolo Magnético*

Neste capítulo são apresentados algumas propriedades dos monopolos magnéticos.

Até o presente dia, não foram encontrados monopolos magnéticos. Mas, devido ao tratamento Dirac[Dirac 1931] de monopolos, eles não são descartados.

Podemos tratar monopolos magnéticos como sendo cargas magnéticas pontuais assim como cargas elétricas, e desenvolver a teoria não relativística da interação entre cargas magnéticas e elétricas em um espalhamento. Isso foi feito por H. Poincaré em 1896. Nesse trabalho, ele discutia a dinâmica de um feixe de elétrons defletido por um magneto muito fino e muito longo, de forma que o campo magnético gerado por uma de suas pontas simulava uma carga magnética pontual.

Neste trabalho, trataremos da interação do campo gerado por uma carga magnética fixa bem como sua interação com uma partícula com carga elétrica. O campo gerado por uma carga magnética pontual g deve ser similar ao gerado por uma carga magnética, ou seja,

$$\mathbf{B} = g \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad , \quad (4.1)$$

de tal forma que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi g \delta(\mathbf{r}) \quad . \quad (4.2)$$

4.1 Colisão de uma carga elétrica com um monopolo magnético

Uma partícula de carga elétrica q é espalhada pelo campo do monopolo magnético localizado na origem. A sua equação de movimento é dada por

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) = \frac{qg}{r^3}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}) \quad . \quad (4.3)$$

Podemos encontrar grandezas conservadas aplicando o produto escalar da equação (4.3) com \mathbf{r} e $\dot{\mathbf{r}}$. Fazendo o produto escalar com $\dot{\mathbf{r}}$, obtemos

$$m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \frac{d(m\dot{r}^2)}{dt} = \frac{qg}{r^3} \dot{\mathbf{r}} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}) = 0 \quad , \quad (4.4)$$

onde notamos que a energia cinética é conservada, conseqüentemente, o módulo da velocidade $\|\dot{\mathbf{r}}\| = \dot{r}$ também será constante no tempo.

Aplicando o produto escalar da equação (4.3) com \mathbf{r} , obtemos

$$m\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \frac{d^2 r^2}{dt^2} - \dot{r}^2 = \frac{qg}{r^3} \mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}) = 0 \quad . \quad (4.5)$$

Integrando a equação* (4.5)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2 r^2}{dt^2} - \dot{r}^2 &= 0 \\ \Rightarrow \int_0^t \frac{d}{d\tilde{t}} \left(\frac{dr^2}{d\tilde{t}} \right) d\tilde{t} &= \frac{dr^2}{dt} - \frac{dr^2}{dt} \Big|_{t=0} = 2\dot{r}^2 t = \\ &= \frac{dr^2}{dt} - 2\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \Big|_{t=0} . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Escolhemos $t = 0$ no ponto em que ambas as partículas estão mais próximas. Nesse tempo $r(t = 0) = b$, onde b , o menor distância entre as partículas, é chamado de parâmetro de impacto. Nesse ponto, a partícula eletricamente carregada que se aproximava começa a se distanciar, portanto, o produto escalar $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$ na menor distância entre as partículas, ou seja, em $t = 0$. Dessa forma, a equação (4.6) toma a forma

$$\begin{aligned} \frac{dr^2}{dt} &= 2\dot{r}^2 t \\ \Rightarrow r^2 - r^2 \Big|_{t=0} &= r^2 - b^2 = \dot{r}^2 t^2 \\ \therefore r &= \sqrt{\dot{r}^2 t^2 + b^2} . \end{aligned} \quad (4.7)$$

A equação (4.7) é a equação da componente radial da trajetória da partícula com carga elétrica. Dela vemos que a órbita não é fechada: ela vem do infinito, $t = -\infty$, até uma distância mínima b e volta para o infinito, $t = \infty$.

O módulo do momento angular

$$\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} \quad (4.8)$$

é conservado, porém, sua direção não é. De fato, a evolução temporal de $\tilde{\mathbf{L}}$ é

$$\frac{d\tilde{\mathbf{L}}}{dt} = \frac{d\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{qg}{mr^3} (\tilde{\mathbf{L}} \times \mathbf{r}) = qg \frac{d\hat{r}}{dt} , \quad (4.9)$$

onde \hat{r} é o vetor unitário na direção e sentido de \mathbf{r} . Se aplicarmos o produto escalar de (4.9) com $\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{L}}$, obteremos

$$\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{L}} \cdot \frac{d\tilde{\mathbf{L}}}{dt} = \frac{d\|\tilde{\mathbf{L}}\|^2}{dt} = \frac{qg}{mr^3} (\tilde{\mathbf{L}} \times \mathbf{r}) \cdot \tilde{\mathbf{L}} = 0 , \quad (4.10)$$

onde, analisando o momento angular no ponto onde a partícula elétrica está mais próxima do monopolo magnético, o módulo conservado é dado por $\|\tilde{\mathbf{L}}\| = mvb$.

Mostramos na equação (4.9) que a direção do momento angular não é conservado. Contudo,

*o módulo da velocidade, \dot{r} sem negrito, é conservado; a velocidade $\dot{\mathbf{r}}$, em negrito, não.

podemos definir um momento angular generalizado

$$\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{L}} - qg\hat{r} \quad , \quad (4.11)$$

que é conservado, subtraindo os dois lados da equação (4.9) a quantidade $qg\frac{d\hat{r}}{dt}$.

O ângulo entre o momento angular generalizado e a direção da partícula é constante, $\mathbf{L} \cdot \hat{r} = qg$, o que implica que o movimento fica retido em um cone de abertura angular $2\theta = \arctan\left(\frac{mvb}{qg}\right)$.

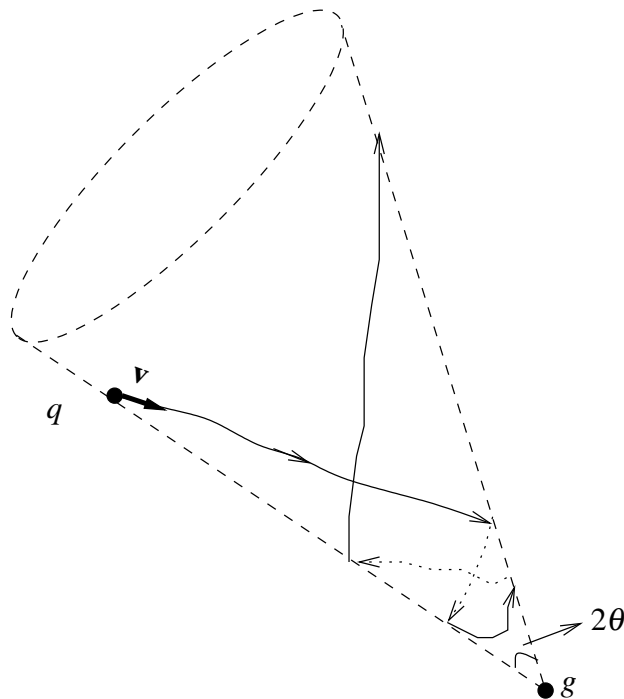


Figura 4.1: Trajetória da partícula elétrica na colisão.

4.2 Transformação dual

Se realmente existem cargas e correntes magnéticas, então as equações de Maxwell estão incompletas. Elas seriam

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} ; & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}_e ; \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= \rho_m ; & -\nabla \times \mathbf{E} &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{J}_m , \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde \mathbf{J}_m e ρ_m são a corrente e densidade de carga magnética, respectivamente. Para as equações (4.12) foi suposto que \mathbf{J}_m e ρ_m atendem a equação da continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho_m dV + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad . \quad (4.13)$$

As equações (4.12) podem ser obtidas a partir das equações comuns de Maxwell com a transformação dual

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} \cos(\xi) + c\tilde{\mathbf{B}} \sin(\xi); \quad c\mathbf{B} = -\tilde{\mathbf{E}} \sin \xi + \tilde{\mathbf{B}} \cos(\xi) \quad , \quad (4.14)$$

onde ξ é um pseudo-escalar*. A transformação também pode ser expressa da forma

$$\mathbf{E} + i\mathbf{B} = e^{-i\xi} (\tilde{\mathbf{E}} + i\tilde{\mathbf{B}}) \quad . \quad (4.15)$$

Algumas quantidades são invariantes a essas transformações, tais como

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{B}} (\cos^2(\xi) + \sin^2(\xi)) = \tilde{\mathbf{E}} \times \tilde{\mathbf{B}} \quad ; \quad (4.16)$$

$$E^2 + c^2 B^2 = \left| e^{i\xi} (\tilde{\mathbf{E}} + i\tilde{\mathbf{B}}) \right|^2 = \tilde{E}^2 + c^2 \tilde{B}^2 \quad ; \quad (4.17)$$

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left[E_i E_j + c^2 B_i B_j - \delta_{ij} \frac{1}{2} (E^2 + c^2 B^2) \right] = \epsilon_0 \left[\tilde{E}_i \tilde{E}_j + c^2 \tilde{B}_i \tilde{B}_j - \delta_{ij} \frac{1}{2} (\tilde{E}^2 + c^2 \tilde{B}^2) \right] \quad (4.18)$$

Se completarmos a transformação com a transformação dual das cargas e correntes da forma

$$\begin{aligned} \rho_e + i\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\rho_m &= e^{-i\xi} \left(\tilde{\rho}_e + i\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\tilde{\rho}_m \right) \\ \mathbf{J}_e + i\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\mathbf{J}_m &= e^{-i\xi} \left(\tilde{\mathbf{J}}_e + i\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\tilde{\mathbf{J}}_m \right) \end{aligned} \quad , \quad (4.19)$$

obteremos novamente as equações de Maxwell da forma (4.12). Portanto, as transformações (4.15) e (4.19) não alteram a dinâmica das partículas. Então, podemos obter as equações de Maxwell da forma (4.12), e portanto divergentes do campo magnético não nulos, para o eletromagnetismo mesmo sem nenhum acréscimo à teoria. Contudo, a razão de todas as cargas e correntes elétricas pelas magnéticas devem ser uma constante para todas as partículas. Isso representa que apesar do divergente de \mathbf{B} ser diferente de zero não temos um monopolo magnético real. Um monopolo real existe quando não é possível fazer uma transformação dual de forma a retirarmos a carga magnética.

Devemos notar que

- ρ_m é um pseudo escalar ímpar sobre reversão temporal;
- \mathbf{J}_m é um vetor par sobre reversão temporal.

Dessa forma, se existirem partículas com cargas elétricas e magnéticas, a reversão temporal e a inversão espacial não seriam mais simetrias físicas.

*Observamos que $\cos(\xi)$ é um escalar, visto que é composto por potências pares de ξ . Analogamente concluímos que $\sin(\xi)$ é um pseudo-escalar.

4.3 Quantização semi-clássica

Dirac mostrou que se os monopolos existirem, então a carga elétrica e magnética são quantizadas da forma

$$\frac{eg}{\hbar} = \frac{n}{2} \quad ; \quad n \in \mathbb{Z} \quad , \quad (4.20)$$

ou seja, bastaria existir um monopolo para que a carga elétrica fosse quantizada.

Quantização semi clássica

Uma partícula de carga q e massa m colide com um monopolo com um parâmetro de impacto b muito grande. Inicialmente a partícula tem velocidade $\mathbf{v} = v\hat{z}$, e o vetor posição em relação ao monopolo e o vetor de velocidade da partícula estão contidos no plano xz .

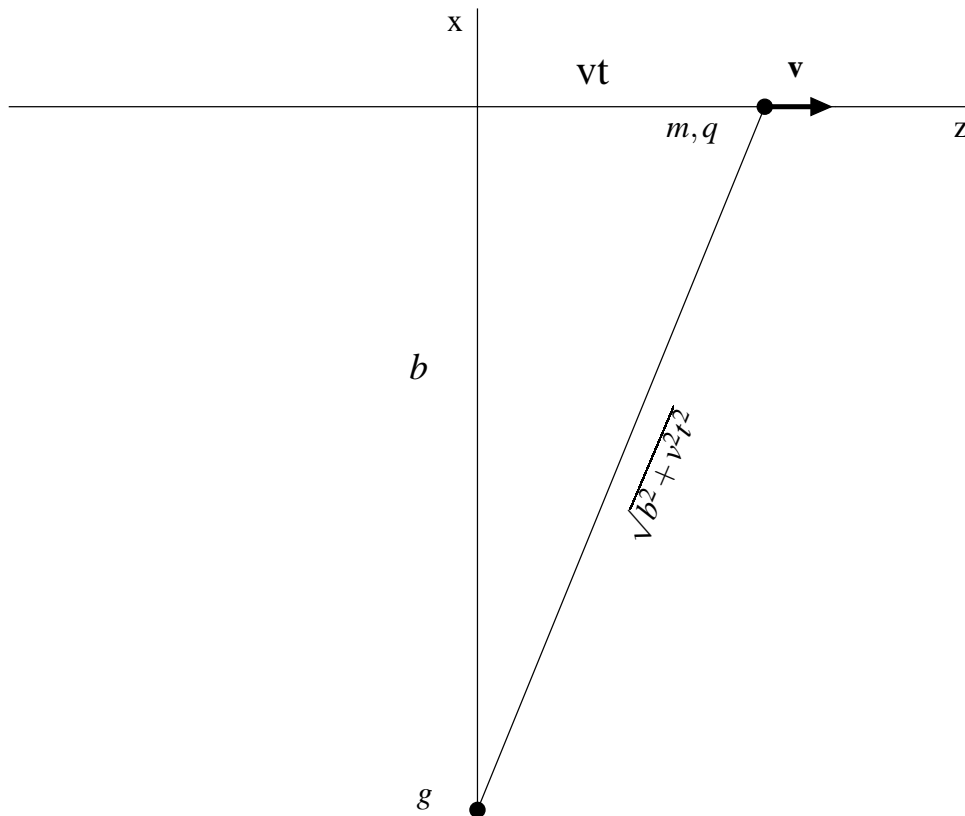


Figura 4.2: Colisão de uma partícula elétrica e magnética com parâmetro de impacto $b \gg vt$.

O campo magnético gerado é $\mathbf{B} = \frac{g\mathbf{r}}{r^3}$. De tão longe do monopolo, a partícula não é defletida, mas é impulsionada na direção y pela força, de acordo com (4.3),

$$F_y = qvB_x = qvg \frac{x}{r^3} = qvg \frac{\cos(\theta)}{r^2} = qvg \frac{b}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} \quad . \quad (4.21)$$

O impulso total dado pela partícula é dado por

$$\Delta P_y = qvgb \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} dt = \frac{qg}{2\pi b} \quad . \quad (4.22)$$

O momento angular varia* através da adição de impulso. A adição de momento angular não depende do parâmetro de impacto nem da velocidade inicial da partícula. De fato, usando (4.22)

$$\Delta L_z = b\Delta P_y = 2qg \quad . \quad (4.23)$$

Da mecânica quântica sabemos que a variação do momento angular não pode ser qualquer, mas deve ser um múltiplo inteiro de \hbar . Assim, da equação (4.23) obtemos a quantização

$$\begin{aligned} \Delta L_z &= n\hbar = 2eg \\ \therefore \frac{eg}{\hbar} &= \frac{n}{2} \quad n \in \mathbb{Z} \quad . \end{aligned}$$

Podemos reobter a equação (4.23) a partir da variação do momento angular definido em (4.8), notando que o momento angular generalizado definido na equação (4.11) se conserva, e que como b é muito grande, $\hat{r}(t = -\infty) = -\hat{r}(t = +\infty)$. Dessa forma

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{L} = 0 &= \Delta \tilde{\mathbf{L}} - 2eg\hat{r}(t = -\infty) \\ \therefore \Delta \tilde{\mathbf{L}} &= 2eg\hat{r}(t = -\infty) \end{aligned}$$

4.4 Vetor Potencial de um Campo de Monopolo Magnético

Na existência de um monopolo magnético, analogamente como um campo elétrico na presença de um monopolo elétrico, o divergente do campo magnético não é nulo, mas dado por (4.2). Contudo, na seção 3.2.3 mostramos que o campo magnético é um rotacional do potencial vetor \mathbf{A} , e seria esperado que o gradiente do campo magnético fosse sempre nulo:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})(\mathbf{r}) = 0 \quad , \quad (4.24)$$

para todo \mathbf{r} onde \mathbf{A} exista.

Então, se quisermos que o campo magnético tenha um divergente não nulo

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = g \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad , \quad (4.25)$$

*Apesar do módulo permanecer constante, como vimos na equação (4.10).

devemos escolher um potencial vetor com uma singularidade, de tal forma a não atender a equação (4.24). Uma boa escolha é

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \Theta(\theta) \nabla \phi \quad , \quad (4.26)$$

onde θ é o ângulo polar e ϕ é o ângulo azimutal. O campo magnético dado pelo potencial vetor dado em (4.26) é*

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times [\Theta(\theta) \nabla \phi] = \nabla \Theta \times \nabla \phi + \Theta \nabla \times (\nabla \phi) \\ \therefore \mathbf{B} &= \frac{d\Theta}{d\theta} \frac{\mathbf{r}}{\sin(\theta) r^3} \quad . \end{aligned} \quad (4.27)$$

Para que o campo magnético na equação (4.27) seja igual ao campo que procuramos (4.25) devemos impor que

$$\Theta(\theta) = -g(\alpha + \cos(\theta)) \quad , \quad (4.28)$$

onde α é uma constante arbitrária.

Assim, obtemos um potencial vetor da forma

$$\mathbf{A} = -\frac{g(\alpha + \cos(\theta))}{r \sin(\theta)} \hat{\phi} \quad , \quad (4.29)$$

que atende a equação (4.25). Vale notar que o potencial vetor definido em (4.29) tem uma singularidade na direção z . Podemos atenuá-la à metade do eixo, escolhendo $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$. Essas escolhas retiram a sigularidades em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, respectivamente. Escolhemos daqui para frente $\alpha = 1$, o que implica

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} = -\frac{g\hat{\phi}}{r} \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = 0 \quad ,$$

entretanto, analisando o limite na direção oposta em relação ao eixo vemos que ele diverge[†]:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \mathbf{A} = -\frac{g\hat{\phi}}{r} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = -\infty \quad .$$

Podemos escrever a equação (4.29) de forma covariante[‡] e que $\mathbf{r} \cdot \hat{z} = r \cos(\theta)$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{g}{r} \frac{\mathbf{r} \times \hat{z}}{r - \mathbf{r} \cdot \hat{z}} \quad . \quad (4.30)$$

O potencial representado na equação (4.30) é conhecido como o *Potencial de Dirac*.

*Devemos observar que $\nabla \theta = \frac{\hat{\theta}}{r}$, $\nabla \phi = \frac{\hat{\phi}}{r \sin(\theta)}$ e que $\hat{\theta} \times \hat{\phi} = \hat{r}$

†A coordenada $\theta \in [0, \pi]$.

‡Sabendo que $\hat{\phi} = -\frac{[\mathbf{r} \times \hat{z}]}{r \sin(\theta)}$, onde \hat{z} é o vetor unitário a direção positiva do eixo z .

A singularidade do Potencial de Dirac

O potencial vetor de Dirac pode ser expresso da forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -g(1 + \cos(\theta))\nabla\phi = -g(1 + \cos(\theta))\left(\frac{i}{e}\right)U^{-1}\nabla U \quad , \quad (4.31)$$

onde $U = e^{-ieg\phi}$. Então, o potencial vetor de Dirac é uma transformação de calibre pesada por um fator angular. Até agora não conhecemos o comportamento do campo magnético na singularidade. Não sabemos aferir com certeza, por exemplo, qual seria o fluxo do campo magnético em uma superfície fechada contendo o monopolo. De fato, o campo magnético obtido pelo potencial vetor de Dirac é dado por

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{g\mathbf{r}}{r^3} \quad ; \quad \mathbf{r} \neq z\hat{z} \quad \forall z > 0 \quad , \quad (4.32)$$

onde podemos aferir o divergente do campo magnético em todo o espaço, exceto uma semi reta.

Podemos encontrar o valor do campo no eixo z através da definição do rotacional nessa direção:

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{z} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_{\sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad , \quad (4.33)$$

onde $d\mathbf{l}$ é perpendicular ao eixo z, e S é a área da superfície limitada pela curva fechada σ , cujo espaço tangente é perpendicular ao vetor \hat{z} .

O rotacional do potencial vetor de Dirac no eixo z está, por simetria, também sobre esse eixo. De modo que a equação (4.33) define totalmente o rotacional nesse eixo.

Para encontrarmos o comportamento da componente singular, podemos procurar o fluxo através da superfície S que determina o rotacional. O rotacional pode ser encontrado integrando-se sobre a borda de um círculo de raio infinitesimal ε perpendicular a \hat{z} centrado no eixo z. Esse fluxo infinitesimal só engloba o campo magnético singular, dando

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi\varepsilon^2}{\pi\varepsilon^2} \oint_{\sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{g(1 + \cos(\theta_0))}{r \sin(\theta_0)} \hat{\phi} \right] \cdot [\varepsilon d\phi \hat{\phi}] \\ &= -2\pi g \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2 (r+z)}{r(r^2 - z^2)} \quad , \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde \mathbf{S} é o vetor de área infinitesimal, e θ_0 é o ângulo polar, fixo durante toda a integração, que possui as relações:

$$\cos(\theta_0) = \frac{z}{r} \quad ; \quad \sin(\theta_0) = \frac{\varepsilon}{r} = \frac{r^2 - z^2}{r\varepsilon} \quad .$$

Ao aplicarmos o limite da equação (4.34) para $z < 0$, o fator $r^2 - z^2$ não diverge, de forma que o fluxo pela superfície infinitesimal é zero. O que era esperado, pois com $z < 0$ o campo magnético é bem comportado. Contudo, ao aplicarmos o mesmo limite para $z > 0$, a diferença $r^2 - z^2 = \varepsilon^2$ e obtemos um fator finito:

$$\mathbf{B}_{\text{SING}} \cdot \mathbf{S} = -2\pi g \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2 (r+z)}{r\varepsilon^2} = -2\pi g \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(1 + \frac{z}{r}\right) = -4\pi g \quad . \quad (4.35)$$

O fluxo da área tendendo a zero, mas nunca zero, é nulo para $z < 0$, porém, tende a um valor finito para $z > 0$. Esse comportamento pode ser descrito por uma singularidade tipo delta de Dirac:

$$\mathbf{B}_{\text{SING}} = -4\pi g d(z) \delta(r/\sin(\theta)) \hat{z} \quad . \quad (4.36)$$

Com o campo singular, podemos definir completamente o campo magnético dado pelo potencial vetor de Dirac:

$$\mathbf{B} = \frac{g\mathbf{r}}{r^3} - 4\pi g d(z) \delta(r/\sin(\theta)) \hat{z} \quad , \quad (4.37)$$

onde (z) é a função degrau. O campo magnético em (4.37) possui fluxo nulo através de uma superfície fechada contendo o monopolo. Diferente do que queríamos.

O comportamento dado em (4.37) pode ser desenvolvido por um solenoide semi-infinito, e de raio muito pequeno: fora do solenoide o campo desenvolvido é radial à sua ponta. Dentro, existe um singular ao longo do solenoide que compensa o fluxo da componente radial.

Nesse paralelo, ainda podemos expressar o potencial vetor como sendo resultado de uma série de dipolos de magnetização infinitesimal $d\mathbf{m} = \frac{g}{\mu_0} d\mathbf{l}$ em uma linha semi-infinita. A contribuição individual de cada dipolo será

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 d\mathbf{m} \times \nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} \right) \quad . \quad (4.38)$$

O potencial vetor total é, então

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -g \int_{\gamma} d\tilde{\mathbf{l}} \times \nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} \right) \quad , \quad (4.39)$$

onde γ é a curva que passa por todo solenoide.

4.4.1 Transformação da direção da singularidade

O potencial de Dirac nos trouxe um inconveniente: somado ao potencial radial esperado, obtemos um potencial singular. Para driblarmos esse problema, temos que encontrar condições

tais que o campo magnético resultante não dependa da posição da semirreta singular. Somente dessa forma teremos cargas magnéticas reais, pois a corda deixará de ser um ente observável, portanto, não físico.

Recordemos que os campos eletromagnéticos são invariantes sobre transformação de calibre do tipo

$$\mathbf{A} \rightarrow \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\lambda(\mathbf{r}) \quad , \quad (4.40)$$

onde \mathbf{A} e $\tilde{\mathbf{A}}$ representam o mesmo campo magnético. A função $\lambda(\mathbf{r})$ que fará a transformação pode ter mais de um valor para uma mesma posição como, por exemplo, $\phi(\mathbf{r})$ que para um mesmo \mathbf{r} possui valores 0 e 2π .

Contudo, a transformação de calibre não pode ser ambígua, de forma que $\nabla\lambda$ precisa associar apenas um valor a cada \mathbf{r} . Isso acontece com ϕ cujo gradiente

$$\nabla\phi = \frac{\hat{\phi}}{r \sin(\theta)}$$

não tem ambiguidade. Porém, essa função deve ser singular na linha que une as regiões ambíguas*. Esse tipo de função multivalor é responsável por adicionar singularidades nos potenciais vetores e campos magnéticos transformados. Essa modificação pode ser observada na variação do fluxo entre o campo magnético original, \mathbf{B} , e o transformado, $\tilde{\mathbf{B}}$:

$$\Delta\Phi = \int_{\Omega} d\mathbf{S} \cdot (\tilde{\mathbf{B}} - \mathbf{B}) = \int_{\Omega} d\mathbf{S} \cdot \nabla \times (\nabla\lambda) = \oint_{\partial\Omega} d\mathbf{l} \cdot \nabla\lambda \quad . \quad (4.41)$$

Assim, o fluxo é constante se λ representar apenas um valor único ao longo de $\partial\Omega$. Por exemplo, a transformação dada por $\lambda = 2g\phi$ do potencial vetor de Dirac (4.29), obtemos a transformação do sentido da singularidade, da forma

$$\tilde{\mathbf{A}} = -\frac{g(1 + \cos(\theta))}{r \sin(\theta)} \hat{\phi} + \frac{2g}{r \sin(\theta)} \hat{\phi} = -\frac{\cos(\theta) - 1}{r \sin(\theta)} \hat{\phi} \quad . \quad (4.42)$$

Nesse caso, a singularidade sofreu uma rotação polar de π . Pela equação (4.41), foi adicionado $4\phi g = \lambda(2\pi) - \lambda(0)$ ao fluxo de todas as superfícies que são perfuradas pelo eixo z . A posição do fio é mudada pela transformação de calibre (4.40), então o campo magnético do fio não é físico.

Uma transformação mais geral que leve um fio da direção \hat{n} para a direção \hat{n}' da forma

$$\mathbf{A}_{\hat{n}} \rightarrow \mathbf{A}_{\hat{n}'} = \mathbf{A}_{\hat{n}} + \nabla\lambda_{\hat{n},\hat{n}'} \quad . \quad (4.43)$$

*Ela deve ser singular, pois não é contínua nessa intercessão.

Consideremos uma superfície σ feita pelos fios e fechado no infinito.

A diferença entre os potenciais vetores é dada por, utilizando (4.39),

$$\begin{aligned}
 A_{\hat{n}} - \mathbf{A}_{\hat{n}} &= \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}} \lambda_{\hat{n}, \hat{n}} = \\
 &= -g \int_{l_1} \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}} \left(\frac{1}{\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}} \right) \times d\tilde{\mathbf{l}} + g \int_{l_2} \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}} \left(\frac{1}{\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}} \right) \times d\tilde{\mathbf{l}} - g \int_{l_3} \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}} \left(\frac{1}{\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}} \right) \times d\tilde{\mathbf{l}} \\
 \therefore \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}} \lambda_{\hat{n}, \hat{n}} &= -g \oint \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}} \left(\frac{1}{\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}} \right) \times d\tilde{\mathbf{l}} \quad . \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

Analisando a equação (4.44) componente a componente, com $\hat{x}_i = \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$:

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}} \lambda_{\hat{n}, \hat{n}} \cdot \hat{x}_i &= -g \oint \hat{x}_i \cdot \left[\nabla_{\tilde{\mathbf{r}}} \left(\frac{1}{\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}} \right) \times d\tilde{\mathbf{l}} \right] \\
 &= g \oint d\tilde{\mathbf{l}} \cdot \left[\nabla_{\tilde{\mathbf{r}}} \left(\frac{1}{\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}} \right) \times \hat{x}_i \right] = g \int_{\sigma} d\hat{\mathbf{S}} \cdot \left\{ \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}} \times \left[\nabla_{\tilde{\mathbf{r}}} \left(\frac{1}{\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}} \right) \times \hat{x}_i \right] \right\} \\
 &= g \int_{\sigma} d\tilde{\mathbf{A}} \cdot \left[(\hat{x}_i \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}}) \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}} \left(\frac{1}{\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}} \right) \right] = g \int_{\sigma} d\tilde{\mathbf{A}} \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \left[\nabla_{\tilde{\mathbf{r}}} \left(\frac{1}{\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}} \right) \right] \\
 &= g \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\sigma} \frac{d\tilde{\mathbf{A}} \cdot (\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})}{(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})^3} = g \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\sigma} \frac{d\Omega (\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})^3}{(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})^3} \\
 \Rightarrow \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}} \lambda_{\hat{n}, \hat{n}} \cdot \hat{x}_i &= g \frac{\partial}{\partial x_i} \Omega
 \end{aligned}$$

$$\therefore \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}} \lambda_{\hat{n}, \hat{n}}(\mathbf{r}) = g \nabla \Omega_{\hat{n}, \hat{n}}(\mathbf{r}) \quad , \quad (4.45)$$

onde Ω é o ângulo sólido entre (\mathbf{r}) , \hat{n} e \hat{n} .

A presença de monopolos reais exige uma mudança nas transformações de simetria. Como mencionado na seção 4.2. Por exemplo, a paridade não é mais uma simetria, pois a paridade do potencial vetor de Dirac não nos leva a uma simetria:

$$P : \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(-\mathbf{r}) = -\frac{g[\mathbf{r} \times \hat{n}]}{r(r + \mathbf{r} \cdot \hat{n})} \neq \pm \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad . \quad (4.46)$$

Contudo, podemos definir uma nova transformação de paridade que prevê o monopolo:

$$\mathcal{P} : A(\mathbf{r}) = P : \mathbf{A}(\mathbf{r}) + 2g \nabla \phi = A(\mathbf{r}) \quad . \quad (4.47)$$

5 *Conclusão*

Neste capítulo são apresentadas conclusões e metas futuras.

5.1 Conclusão

A Teoria Clássica de Campo e monopolo magnético são temas que tocam em pontos indiscutíveis da graduação: o divergente nulo do campo magnético e o argumento de que algumas equações física não podem ser deduzidas por primeiros princípios. Esses tópicos desmistificam a ideia da física baseada somente em postulados experimentais e demonstram a capacidade conclusiva da teoria sobre hipóteses de fatos observados.

A Teoria Clássica de Campo consegue descrever de forma totalmente teórica as propriedades experimentais do eletromagnetismo de Maxwell, teoria formulada inicialmente pela prática, apenas utilizando o fato dela ser uma teoria de campo relativística vetorial tridimensional que segue o princípio da superposição e que possui uma carga elétrica que se conserva.

O monopolo magnético quebra o paradigma de um mundo perfeito e sem singularidades, mostrando características interessantes as quais não foram comprovadas experimentalmente, mas que também não podem ser excluídas.

Os temas abordados neste monografia estão limitados a dimensões macroscópicas, onde os efeitos quânticos não influenciam os campos. É na Teoria Quântica de Campo que esses efeitos microscópicos são considerados. Nela, o monopolo é descrito de diversas formas, sem se restringir à corda de Dirac, e desenvolve conclusões que ultrapassam a quantização da carga elétrica.

Um trabalho mais completo deveria explorar espaços curvos, conter outros exemplos de aplicações da teoria como a Relatividade Geral, tratar do panorama atual da busca por monopolos e sua utilidade, desenvolver a colisão de cargas elétricas e magnéticas no formalismo do cálculo variacional e introduzir a passagem do clássico para o quântico.

Uma parte do que foi apontado no parágrafo anterior estava em andamento, contudo, devido ao tempo curto do curso de monografia não foram concluídos no prazo. Um exemplo foi um capítulo sobre análogos ótico-mecânicos, o qual introduzia o conceito de curvatura, que foi excluído da monografia.

A Teoria Clássica de Campo e o monopolo magnético são temas que todo físico teórico deveria estudar em algum momento, pois juntos eles mostram o poder de uma teoria de descrever os fenômenos físicos, e as causas não intuitivas que são consequências dessa teoria.

Referências Bibliográficas

- [Dirac 1931]DIRAC, P. A. M. Quantised singularities in the electromagnetic field. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, v. 133, n. 821, p. 60–72, 1931. Disponível em: <<http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/133/821/60.short>>.
- [Griffiths 1999]GRIFFITHS, D. *Introduction to electrodynamics*. Nova Jersey, Estados Unidos da América: Prentice Hall, 1999.
- [Jackson 1999]JACKSON, J. *Classical electrodynamics*. Nova Jersey, Estados Unidos da América: Wiley, 1999. 273-280 p.
- [Jost e Li-Jost 1998]JOST, J.; LI-JOST, X. *Calculus of variations*. Cantabrigia, Inglaterra: Cambridge University Press, 1998. (Cambridge studies in advanced mathematics).
- [Landau e Lifšic 2009]LANDAU, L.; LIFŠIC, E. *Course of theoretical physics: The classical theory of fields*. [S.l.]: Pergamon Press., 2009.
- [Lemos 2007]LEMONS, N. *MECANICA ANALITICA*. Rio de Janeiro: LIVRARIA DA FISICA, 2007.
- [Schönberg 2002]SCHÖNBERG, M. Sobre a existência de monopolos magnéticos. *Estudos Avançados*, scielo, v. 16, p. 219 – 223, 04 2002. ISSN 0103-4014. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-40142002000100013&nrm=iso>.
- [Shnir 2005]SHNIR, Y. *Magnetic monopoles*. Oldemburgo, Alemanha: Springer, 2005. (Texts and monographs in physics).
- [Zia, Redish e McKay 2009]Zia, R. K. P.; Redish, E. F.; McKay, S. R. Making sense of the Legendre transform. *American Journal of Physics*, v. 77, p. 614–622, jul. 2009.